Cvičení 1

Vektorové prostory, Vektorové podprostory, Lineární kombinace, Závislost vektorů, Lineární obal

1. V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel. Ověřte, zda se jedná o strukturu VP, pokud jsou operace $+$ a $\cdot$ pro $a \in \mathbb{R}$, a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definovány následovně:

   (a) $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$, $a \cdot x = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (b) $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \cdot x = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot x_2 \end{pmatrix}$

2. Definujte strukturu VP:

   (a) Na jednoprvkové množině $\{u\}$.

   (b) Na dvouprvkové množině $\{u, v\}$.

   (c) Na intervalu $(0, \infty)$.
   (bonusový úkol za 5 bodů)

3. Zjistěte, zda daná množina M tvoří vektorový podprostor v $\mathbb{R}^2$. Operace sčítání a násobení jsou definovány po složkách.
   $M = \{(x, y) | x \cdot y \geq 0\}$

4. Lze vektor $(1, 2, 3, 4)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $(1, 3, 2, 0)$ a $(2, 3, 2, 3)$?

5. Jsou následující množiny lineárně nezávislé?

   (a) $(1, 2), (2, 1), (2, 2) \in \mathbb{R}^2$

   (b) $(1, 2, 3), (3, 4, 5), (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$

   (c) $(1, 0, 3), (2, 1, 1), (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$

   (d) $(1, 0, 3), (2, 1, 1), (1, 2, 3) \in \mathbb{Z}_3$

6. Víme, že vektory e_1, e_2, e_3, e_4 jsou lineárně nezávislé. Jsou lineárně nezávislé i vektory u, v a w?
   $u = e_1 + e_2 + e_3$
   $v = e_1 + e_2 + e_4$
   $w = e_2 + e_3 + e_4$

7. Je jeden vektor lineárně nezávislý?

Řešení

1.
   (a) Ne
   (b) Ne
2.
   (a) + identita, $\cdot : a \cdot u = u$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$
   (b) + sčítání na zbytkových třídách $\mathbb{Z}_2$, $\cdot$ násobení na zbytkových třídách (jeden z vektorů představuje 0 a druhý 1)
   (c) (bonusový úkol za 5 bodů)
3. Neplatí
4. Ne
5.
   (a) Ne
   (b) Ano
   (c) Ano
   (d) Ne
6. Jsou lineárně nezávislé
7. Pokud není vektor nulový, pak je lineárně nezávislý.