Cvičení 2

Báze VP, Dimenze báze, Souřadnice vektoru v bázi, Matice přechodu mezi VB, Lineární zobrazení, Matice lineárního zobrazení

1. Víme, že vektory e_1, e_2, e_3, e_4 jsou lineárně nezávislé. Jsou lineárně nezávislé i vektory u, v a w?
   $u = e_1 + e_2 + e_3$
   $v = e_1 + e_2 + e_4$
   $w = e_2 + e_3 + e_4$

2. Zjistěte, zda vektory tvoří bázi vektorového prostoru v $\mathbb{R}^4$.
   $u_1 = (2, 1, 3, -1)$, $u_2 = (7, 4, 3, -3)$, $u_3 = (1, 1, -6, 0)$, $u_4 = (5, 7, 7, 8)$

3. Který z následujících vektorů doplňuje množinu α na bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$?
   $\alpha = \{(1, -2, 1, -1), (1, 0, -1, -1), (1, 1, -2, 0)\}$
   $u_1 = (-1, 2, -1, 1)$, $u_2 = (3, -1, -2, -1)$, $u_3 = (2, 1, 0, -2)$, $u_4 = (2, 1, -3, -2)$

4. Nalezněte souřadnice vektoru $u = (3, 3, 3)$ v bázi $\alpha = \{(1, 0, 2), (2, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

5. Nalezněte matici přechodu $M_{\varphi\varphi'}$ mezi bázemi VP $\varphi = \{(1, 0), (0, 2)\}$ a $\varphi' = \{(1, 3), (3, 1)\}$

6. Máme dány matice přechodu $M_{\varphi\varphi'}$ a $M_{\varphi\varphi''}$. Určete matici přechodu $M_{\varphi'\varphi''}$.
   $M_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $M_{\varphi\varphi''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. Je zadané zobrazení lineární?
   $\lambda(a, b, c) = (2a, 2 - b, c)$

8. Najděte jádro lineárního zobrazení $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.
   $\lambda(x, y, z) = (x + y, 3x + 2z)$

9. Najděte matici lineárního zobrazení $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
   $\lambda(x, y, z) = (x + y, 3x + 2z)$
   vzhledem ke standardní bázi.

10. Najděte matici lineárního zobrazení $\lambda : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$
    $\lambda(ax + b) = (a + b)x - 3b$
    vzhledem k bázím $B = \{x, 2\}$ a $C = \{3x + 1, 1\}$.

11. Lineární zobrazení λ zobrazí vektor $u_1 = (1, 2, -1)$ na 1, vektor $u_2 = (2, -4, 0)$ zobrazí na -2. Na co λ zobrazí vektor $v = (0, 4, -1)$?

Řešení

1. Jsou lineárně nezávislé
2. Jsou lineárně závislé, tedy netvoří bázi
3. Jakékoliv 4 lineárně nezávislé vektory tvoří bázi VP v $\mathbb{R}^4$. Lineárně nezávislý je vektor u_3
4. $u_\alpha = (-3, 3, 6)$
5. $M_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
6. $M_{\varphi'\varphi''} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$
7. Není
8. Prostor generovaný vektorem $< (2, -2, -3) >$
9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
10. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -20 \end{pmatrix}$
11. $\lambda(v) = 2$