Cvičení 5

Afinní zobrazení

1. Je zadané zobrazení afinní?
   $f(x) = x^2 + 1$

2. Určete parametry p a q tak, aby existovalo afinní zobrazení f, ve kterém se body A, B, C zobrazí na body A', B' a C'.
   $A = [2, 1]$, $B = [-2, 3]$, $C = [4, 0]$
   $A' = [p, 3]$, $B' = [0, q]$, $C' = [1, 1]$

Opakování

4. **Vektorové prostory**
   Tvoří množina $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$ vektorový prostor, pokud jsou operace $+$ a $\cdot$ pro všechna $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$ a $k \in \mathbb{R}$ definovány následovně:
   $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
   $k \cdot (x_1, y_1) = (|k \cdot x_1|, |k \cdot y_1|)$?

5. **Vektorové podprostory**
   Zjistěte, zda je daná množina U vektorový podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ s kanonickou strukturou.
   $U = \{(a, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 | \forall a \in \mathbb{R}\}$

6. **Závislost vektorů**
   Zjistěte, zda jsou zadané vektory závislé v $\mathbb{R}^3$.
   $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 0, 2)$, $w = (-3, -1, -4)$

7. **Souřadnice vektoru v bázi**
   Najděte souřadnice vektoru v v bázi α.
   $v = (0, 1, 1)$
   $\alpha = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$

8. **Matice přechodu mezi bázemi**
   Najděte matici přechodu $M_{\varphi\varphi'}$ mezi afinními bázemi $\varphi = \{a_0, \alpha\}$ a $\varphi' = \{a'_0, \alpha'\}$.
   $a_0 = [1, 3]$, $\alpha = \{(1, 0), (0, 2)\}$
   $a'_0 = [1, 1]$, $\alpha' = \{(1, 3), (3, 1)\}$

9. **Matice přechodu mezi bázemi**
   Najděte matici přechodu $M_{\varphi'\varphi}$ mezi afinními bázemi $\varphi = \{a_0, \alpha\}$ a $\varphi' = \{a'_0, \alpha'\}$ z předchozího příkladu.

10. **Lineárně nezávislé vektory**
    Najděte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů. (Kolik jich může maximálně být?)
    $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1)$, $u_4 = (3, 6, 1)$, $u_5 = (1, 1, 5)$, $u_6 = (2, 5, 4)$

11. **Parametrická rovnice přímky**

    Určete parametrickou rovnici přímky procházející body A a B. Rovnici vyjádřete jako součet bodu a vektorového prostoru $\subseteq \mathbb{R}^3$.

    $A = [10, 0]$, $B = [0, 1]$

12. **Body v obecné poloze**

    Určete zda jsou body A, B, C a D v obecné poloze.

    $A = [3, 2, 1]$, $B = [2, 2, 0]$, $C = [0, 0, 1]$, $D = [0, 1, 2]$

13. **Lineární zobrazení**

    Rozhodněte, zda je zadané zobrazení lineární.

    $A(x, y) = (x + 2, 3 + y)$

14. **Jádro lineárního zobrazení**

    Najděte jádro lineárního zobrazení.

    $A(x, y) = (x, 3x)$

Řešení

1. Není.
2. $p = \frac{2}{3}$, $q = 7$
3. Není. Neplatí podmínky 5 a 8.
4. Není. Neplatí ani jedna podmínka.
5. Ano. $w = -u - v$
6. $v_\alpha = (0, -1, 1)$
7. $M_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
8. $M_{\varphi'\varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
9. Maximálně 3 vektory. Například u_1, u_2, u_4.
10. $p = A + V$, $V = \{(-10t, t) | t \in \mathbb{R}\}$
11. Ano, jsou.
12. Není. Není splněna ani jedna podmínka.
13. $\{(0, t) | t \in \mathbb{R}\}$