Vektorové prostory

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Vektorový prostor

Struktura vektorového prostoru Na množině U je dána struktura vektorového prostoru (nad polem reálných čísel), je-li na ní dána binární operace $+$ a zobrazení $\cdot_U : \mathbb{R} \times U \to U$. Operace $+$ a zobrazení $\cdot_U$ splňují pro každé $r, s \in \mathbb{R}$ a $u, v, w \in U$ následující podmínky:

1. $u + v = v + u$
2. $u + v \in U$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$
4. $\exists e \in U : e + u = u + e = u$
5. $\forall u \in U \exists v \in U : u + v = e = v + u$
6. $1 \cdot_U u = u$
7. $r \cdot_U (s \cdot_U u) = (rs) \cdot_U u$
8. $(r + s) \cdot_U u = r \cdot_U u + s \cdot_U u$
9. $r \cdot_U (u + v) = r \cdot_U u + r \cdot_U v$

Vektorový prostor

- **Vektorový prostor** = množina U spolu se strukturou VP
- **Vektory** = prvky VP
- **Skaláry** = reálná čísla používaná v $\cdot_U$
- **Sčítání vektorů** = $+$
- **Nulový vektor** = 0
- **Násobení vektoru skalárem** = $\cdot_U$
- $r \cdot_U u = r \cdot u = ru$

Vektorový prostor - příklad

- **Kanonická struktura VP**: $\mathbb{R}^n$, $+$ a $\cdot_{\mathbb{R}^n}$ def. po složkách.
- **Matice** $m \times n$
- **Polynomy stupně nejvýše** n: P_n

Ověřte podmínky pro strukturu VP.

Vektorový podprostor

Máme VP V. **Vektorový podprostor W** je nějaká podmnožina V, přičemž platí, že W je také VP.
$W \subseteq V$ musí splňovat pro $\forall x, y \in W$ a $a \in \mathbb{R}$ následující podmínky:

1. $x + y \in W$
2. $a \cdot x \in W$

Lineární kombinace vektorů

Lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_k \in U$ s koeficienty $r^1, \dots r^k$ je vektor $r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k$.

O vektorech $u_1, \dots, u_k$ říkáme, že jsou **lineárně závislé**, pokud existují koeficienty $r^1, \dots r^k \in \mathbb{R}$, z nichž alespoň jeden není nulový, tak, že příslušná lineární kombinace je nulový vektor.

Vektory $u_1, \dots, u_k$ se nazývají **lineárně nezávislé**, pokud nejsou lineárně závislé.

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně nezávislé, pak pro každý vektor $v \in U$ existuje nejvýše jedna k-tice čísel $(r^1, \dots r^k)$ taková, že $r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k = v$.

Lineární závislost

Pro vektory $x_1, \dots x_n$ zjistíme zda jsou závislé, pokud nalezneme řešení rovnice
$a^1 x_1 + \dots a^n x_n = 0$.
Řešení:

- soustava rovnic
- Gaussovská eliminační metoda

Lineární obal

Lineárním obalem množiny $K \subseteq U$ rozumíme množinu všech lineárních kombinací všech konečných n-tic vektorů z K pro všechna přirozená čísla n. Lineární obal množiny K značíme $< K >$. Pokud je množina K konečná, $K = u_1, \dots, u_k$, značíme jej také $< u_1, \dots, u_k >$.

Říkáme,že množina K **generuje vektorový prostor** U, pokud $< K >= U$.

Pokud množina $< u_1, \dots, u_k >$ generuje vektorový prostor U, má pro libovolné $v \in U$ rovnice $r^1 u_1 + \cdots + r^k u_k = v$ vždy alespoň jedno řešení.

Lineární obal

Základní vlastnosti:

- Vždy platí $W \subseteq < W >$
- Vždy platí $< W > = << W >>$
- Pokud $W_1 \subseteq W_2$ pak $< W_1 > \subseteq < W_2 >$

Vektorový podprostor

Mějme neprázdnou podmnožinu W VP V splňující $< W > = W$.
Pro libovolných k vektorů $v_1, \dots, v_k \in W$ a libovolných k čísel $r^1 \ \dots r^k \in \mathbb{R}$ vždy platí:
$r^1 v_1 + \dots + r^k v_k \in W$
Na W tím zavádíme strukturu VP zúžením sčítání vektorů a násobení skalárem na W.
W nazýváme **vektorový podprostor VP V**.

Součin VP

Jsou-li U a V VP, lze na množině $U \times V$ zavést strukturu VP tak, že sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem definujeme takto:
$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$
$r(u, v) = (ru, rv)$
pro libovolné vektory $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ a číslo $r \in \mathbb{R}$.
Vektorový prostor $U \times V$ se nazývá **součin vektorových prostorů**.

Báze a souřadnice

Báze VP V je množina lineárně nezávislých vektorů, jejichž lineárním obalem je VP V.
Uspořádanou m-tici $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ vektorů VP V nazýváme **báze VP**, pokud jsou vektory lineárně nezávislé a pokud množina $\{u_1, \dots, u_m\}$ generuje VP V.
Báze je minimální množina vektorů jejíž obalem je VP V.

Dimenze báze

Theorem

Všechny báze VP mají stejný počet prvků.

Tento počet nazýváme **dimenze báze VP**.
Standardní báze = $\mathbb{R}^n$
$([1,0,\dots,0],[0,1,\dots,0],\dots,[0,0,\dots,1])$
Nekonečná báze = báze dimenze 0

Vlastnosti báze

- báze není určena jednoznačně
- všechny báze mají stejný počet prvků
- máme-li bázi VP V $\alpha = \{u_1,\dots,u_n\}$, pak platí, že libovolný vektor $v \in V$ lze vyjádřit lineární kombinací vektorů $u_1,\dots,u_n$

Souřadnice vektoru v **v bázi** α = $v_\alpha = (v_\alpha^1,\dots,v_\alpha^n)$

- $(v+w)_\alpha = v_\alpha + w_\alpha$
- $(rv)_\alpha = r \cdot (v_\alpha)$

Matice přechodu mezi 2 bázemi

- $\alpha = (u_1,\dots,u_n)$, $\overline{\alpha} = (\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_n)$
- $x = a^1 u_1 + \cdots + a^n u_n$
- $x = b^1 \overline{u}_1 + \cdots + b^n \overline{u}_n$

- $\overline{u}_1 = a^{11}u_1 + \cdots + a^{1n}u_n, \dots, \overline{u}_n = a^{n1}u_1 + \cdots + a^{nn}u_n$

Matice přechodu od báze $\overline{\alpha}$ **k bázi** α = $M_{\alpha\overline{\alpha}}$

$$\begin{pmatrix} a^{11} & \dots & a^{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{1n} & \dots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

$v_\alpha = M_{\alpha\overline{\alpha}} v_{\overline{\alpha}}$

Matice přechodu mezi 2 bázemi

- $M_{\alpha\overline{\alpha}} \cdot M_{\overline{\alpha}\alpha} = E$
- $M_{\overline{\alpha}\alpha'} \cdot M_{\alpha'\alpha} = M_{\overline{\alpha}\alpha}$

Lineární zobrazení

$\lambda : U \to V$ zobrazení VP U na V. Toto zobrazení se nazývá **lineární**, jestliže pro každé vektory $u_1, u_2, u \in U$ a skalár r platí:

- $\lambda(u_1 + u_2) = \lambda(u_1) + \lambda(u_2)$
- $\lambda(ru) = r\lambda(u)$

$\lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) = r^1\lambda(u_1) + r^2\lambda(u_2)$
homomorfismus

Lineární zobrazení

- $\lambda(o_U) = o_V$
- **Obraz zobrazení**: $\lambda(U) = Im(\lambda) = \{v \in V | \exists u \in U : \lambda(u) = v\}$
- **Jádro zobrazení**: $Ker(\lambda) = \{u \in U | \lambda(u) = o_V\}$
- $dim(Im(\lambda)) + dim(Ker(\lambda)) = dim(U)$

Matice lineárního zobrazení

- $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ báze VP U, $u \in U$
- $\lambda(u) = \lambda(u_\alpha^1 u_1 + \dots + u_\alpha^m u_m) = u_\alpha^1 \lambda(u_1) + \dots + u_\alpha^m \lambda(u_m)$
- $\lambda(u_1), \dots, \lambda(u_m) \in V$
- $\lambda(u)$ v bázi β:
  $\lambda(u)_\beta = u_\alpha^1 \lambda(u_1)_\beta + \dots + u_\alpha^m \lambda(u_m)_\beta$
  $$u_\alpha^1 \begin{pmatrix} \lambda(u_1)_\beta^1 \\ \vdots \\ \lambda(u_1)_\beta^m \end{pmatrix} + \dots + u_\alpha^m \begin{pmatrix} \lambda(u_m)_\beta^1 \\ \vdots \\ \lambda(u_m)_\beta^m \end{pmatrix}$$
- $\lambda(u)_\beta = M_{\beta,\alpha}^\lambda \cdot u_\alpha$
  $$M_{\beta,\alpha}^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda(u_1)_\beta^1 & \dots & \lambda(u_m)_\beta^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(u_1)_\beta^m & \dots & \lambda(u_m)_\beta^m \end{pmatrix}$$

Matice lineárního zobrazení λ vzhledem k bázím α a β

Lineární zobrazení

- **Lineární transformace vektorového prostoru**: $\lambda : U \to U$
- **Matice lineární transformace λ vzhledem k bázi α**: $M_{\alpha,\alpha}^\lambda = M_\alpha^\lambda$