Afinní prostory

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Afinní prostor

Afinní prostor množina A spolu se zobrazením $+_A : A \times U \to A$, kde U je vektorový prostor, které má následující vlastnosti:

1. $\forall a \in A$, $o + a = a$, $o \in U$ je nulový vektor
2. $\forall v, w \in U$ a $a \in A$: $(a + v) + w = a + (v + w)$
3. $\forall a \in A$ zobrazení $U \to A$: $v \to a + v$ je bijekce

- **Součet bodu a vektoru**: $a +_A v$ nebo jen $a + v$
- **Body**: prvky množiny A
- **Zaměření AP**: VP U

Afinní prostor

Struktura afinního prostoru Na neprázdné množině A je dána struktura afinního prostoru (afinní struktura), je-li dán vektorový prostor U a zobrazení $+_A : A \times U \to A$ takové, že:

1. $\forall a \in A$, $u, v \in U$: $(a +_A u) +_A v = a +_A (u + v)$
2. $\forall a, b \in A$ a $\exists! u \in U$: $a +_A u = b$

Příklady AP

- **Kanonická struktura AP**:
  $A = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^n$, sčítání bodu a vektoru je def. po složkách

- **AP konečné dimenze** = pokud je VP konečné dimenze
- **Dimenze AP** = dimenze VP U
- **Afinní bod** = AP dimenze 0
- **Afinní přímka** = AP dimenze 1
- **Afinní rovina** = AP dimenze 2

Základní vlastnosti AS

Theorem

Pro libovolný AP A je zaměřením U a prvky $a, b \in A$, $u \in U$ platí:

1. $a + o = a$
2. $a - b = -(b - a)$
3. $(a + u) - b = (a - b) + u$

Důkaz.

1. Z def. $\forall a, b \in A$, $\exists! u \in U$, $a + u = b$. $a + u = a$. Dosadíme $a + u = (a + u) + u$. Z podmínky 1 pak $a + u = a + (u + u)$. $u = u + u$ splňuje jen o.
2. Označme $a - b = u$, $b - a = v$. $b = a + v = (b + u) + v = b + (u + v)$. Z bodu 1 víme, že $u + v = o$ tedy $u = -v$.
3. Vektor $v = (a + u) - b$ splňuje podmínku $b + v = a + u$. Přičtením $-v$ a úpravou dostaneme: $a = b + (v - u)$ odtud $v - u = a - b$. Přičtením u dostaneme $v = (a - b) + u$.

$\square$

Základní vlastnosti AS

Theorem

Pro libovolné 3 body a_1, a_2, a_3 AP A platí
$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = (a_3 - a_1)$

Důkaz.

Označení: $(a_2 - a_1) = u_1$, $(a_3 - a_2) = u_2$, $(a_3 - a_1) = v$.
musíme dokázat, že $u_1 + u_2 = v$.
Z 2. podmínky $(a + u = b)$: $a_1 + v = a_3$, $a_1 + u_1 = a_2$, $a_2 + u_2 = a_3$.
$(a_1 + u_1) + u_2 = a_3$. $a_1 + (u_1 + u_2) = a_3$. Z podmínky jednoznačnosti $(u_1 + u_2) = v$. $\square$

Základní vlastnosti AS

Theorem

Pro libovolné 2 body $a, b \in A$ a $u, v \in U$ platí
$(a + u) - (b + v) = (a - b) + (u - v)$

Důkaz.

Označení $(a + u) - (b + v) = w$. Tedy platí $(a + u) = (b + v) + w$.
$w = (a - b) + (u - v)$
$(a + u) = (b + v) + (a - b) + (u - v)$
$(b + v) + (a - b) + (u - v) = b + (a - b) + v + (u - v)$; $b - (a - b) = a$;
$v + (u - v) = u$
tedy platí
$(b + v) + (a - b) + (u - v) = b + (a - b) + v + (u - v) = (a + u)$ $\square$