Afinní podprostory

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Afinní kombinace

Afinní kombinace lineární kombinace $u_1, \ldots, u_k \in U$ s koeficienty $r^1, \ldots r^k$, kde navíc platí $r^1 + \cdots + r^k = 1$. (1 = neutrální prvek tělesa)

Afinní kombinace

Theorem

Mějme body $a_0, \ldots, a_m$ *AP A. Pro libovolné dva body* $b, b' \in A$ *a čísla* $r^0, \ldots, r^m$ *taková, že* $r^0 + \cdots + r^m = 1$ *platí:*
$b + r^0(a_0 - b) + \cdots + r^m(a_m - b) = b' + r^0(a_0 - b') + \cdots + r^m(a_m - b')$.

Důkaz.

Rozdílem pravé a levé strany bychom měli získat vektor o.
Dle dříve dokázaných vlastností AP:

$$
\begin{aligned}
&(b - b') + r^0(a_0 - b + b' - a_0) + \cdots + r^m(a_m - b + b' - a_m) = \\
&= (b - b') + r^0(b' - b) + \cdots + r^m(b' - b) = \\
&= (b - b') + (r^0 + \cdots + r^m)(b' - b) = \\
&= (b - b') + (b' - b) = \\
&= o
\end{aligned}
$$

□

Afinní kombinace

Každou afinní kombinaci více než 2 bodů lze vyjádřit pomocí afinní kombinace dvojic bodů.

$r^0 a_0 + r^1 a_1 + r^2 a_2 = (r^0 + r^1)\left(\frac{r^0}{r^0+r^1} a_0 + \frac{r^1}{r^0+r^1} a_1\right) + r^2 a_2$

Za předpokladu, že $r^0 + r^1 \neq 0$

Afinní obal

Afinním obalem neprázdné množiny $K \subseteq A$ nazýváme množinu všech afinních kombinací prvků množiny K. Označujeme symbolem $Aff(K)$.

$$Aff(K) = \{r^0 a_0 + r^k a_k | k \geq 1, a_0, \ldots, a_k \in K, r^0 + \cdots + r^k = 1\}$$

Afinní obal

Theorem

Pro libovolnou neprázdnou množinu $K \subseteq A$ *platí* $Aff(Aff(K)) = Aff(K)$.

Důkaz.

$a \in Aff(Aff(K))$

$a = s^0(r^0 a_0 + r^1 a_1) + s^1(r^2 a_2 + r^3 a_3)$

$a = s^0 r^0 a_0 + s^0 r^1 a_1 + s^1 r^2 a_2 + s^1 r^3 a_3$

$a \in Aff(K)$ $\square$

Afinní podprostory

Neprázdná podmnožina B afinního prostoru A se zaměřením U se nazývá **afinní podprostor afinního prostoru A**, jestliže $Aff(B) = B$.

Afinní podprostory

Theorem

Neprázdná podmnožina B afinního prostoru A se zaměřením U je jeho afinním podprostorem, právě když existuje vektorový podprostor $V \subseteq U$ takový, že jsou splněny následující podmínky:

1. $\forall a \in B, \forall u \in V$ *platí* $a + u \in B$
2. $\forall a, b \in B$ *platí* $b - a \in V$

Důkaz.

$=>$

$V = \{c - b | b, c \in B\}$

1. $u = (c - b)$, $a + u = a + (c - b)$, což je rovno AK $a + c - b$ tedy prvek B
2. triviální

$\square$

Afinní podprostory

Důkaz.

<=

Předpokládáme, že existuje $V \subseteq U$ splňující podmínky. Chceme dokázat $Aff(B) = B$.
Stačí dokázat, že afinní kombinace libovolných dvou bodů z B je prvkem B.
$b_0, b_1 \in B$.
$b = r^0 b_0 + r^1 b_1$, $r^0 + r^1 = 1$
$b = b_0 + r^0(b_0 - b_0) + r^1(b_1 - b_0) = b_0 + r^1(b_1 - b_0)$
Z podmínky 2 víme, že $(b_1 - b_0) \in V$, $r^1(b_1 - b_0) \in V$.
Podmínka 1: $b \in B$ □

Afinní podprostory

V je **zaměření APP B**.

Každý vektorový podprostor daného vektorového prostoru je jeho afinním podprostorem. Naopak to neplatí.

Afinní podprostory

Theorem

Je-li A afinní prostor se zaměřením U a $B \subseteq A$ jeho afinní podprostor se zaměřením $V \subseteq U$, pak množina B spolu s vektorovým prostorem V a zobrazením $+_B : B \times V \to B$ vzniklým zúžením zobrazení $+_A$ je afinní prostor.

Důkaz.

Nutno ověřit podmínky AP, nebo postupovat jako v důkazu předchozí věty. $\square$

Afinní podprostory

Dimenze APP = dimenze AP se strukturou z předchozí věty.

Pokud je dimenze AP A rovna m a APP $B \subseteq A$ je dimenze $m - 1$, pak B nazýváme **nadrovinou v afinním prostoru A**.

Označení:
$B = \{a \in A | a = a_0 + u, u \in V\}$
$B = a_0 + V$

Afinní podprostory

Theorem

Mějme afinní prostor A se zaměřením U.

1. *Je-li $a_0 \in A$ bod a $V \subseteq U$ vektorový podprostor, pak množina $B = a_0 + V$ je podprostor afinního prostoru A, jehož zaměření je V.*
2. *Je-li B podprostor afinního prostoru A se zaměřením $V \subseteq U$, $a_0 \in B$ bod, pak $B = a_0 + V$.*

Důkaz.

Plyne z předchozí věty. □

Parametrická rovnice

Je-li $(u_1, \dots, u_m)$ báze vektorového podprostoru $V \subseteq U$, platí pro libovolný bod $a_0 \in A$:
$a_0 + V = \{a \in A | a = a_0 + \sum_{i=1}^{m} t^i u_i, t^1, \dots, t^m \in \mathbb{R}\}$.

Parametrická rovnice afinního podprostoru $a_0 + V$:
$a = a_0 + \sum_{i=1}^{m} t^i u_i$