

Afinní podprostory

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.



Palacký University, Olomouc

Afinní kombinace



Afinní kombinace lineární kombinace $u_1, \dots, u_k \in U$ s koeficienty r^1, \dots, r^k , kde navíc platí $r^1 + \dots + r^k = 1$. (1 = neutrální prvek tělesa)

Afinní kombinace



Theorem

Mějme body a_0, \dots, a_m AP A . Pro libovolné dva body $b, b' \in A$ a čísla r^0, \dots, r^m taková, že $r^0 + \dots + r^m = 1$ platí:

$$b + r^0(a_0 - b) + \dots + r^m(a_m - b) = b' + r^0(a_0 - b') + \dots + r^m(a_m - b').$$

Důkaz.

Rozdíl pravé a levé strany bychom měli získat vektor o .

Dle dříve dokázaných vlastností AP:

$$\begin{aligned} (b - b') + r^0(a_0 - b + b' - a_0) + \dots + r^m(a_m - b + b' - a_m) &= \\ = (b - b') + r^0(b' - b) + \dots + r^m(b' - b) &= \\ = (b - b') + (r^0 + \dots + r^m)(b' - b) &= \\ = (b - b') + (b' - b) &= \\ = o \end{aligned}$$



Afinní kombinace



Každou afinní kombinaci více než 2 bodů lze vyjádřit pomocí afinní kombinace dvojic bodů.

$$r^0 a_0 + r^1 a_1 + r^2 a_2 = (r^0 + r^1) \left(\frac{r^0}{r^0 + r^1} a_0 + \frac{r^1}{r^0 + r^1} a_1 \right) + r^2 a_2$$

Za předpokladu, že $r^0 + r^1 \neq 0$



Afinním obalem neprázdné množiny $K \subseteq A$ nazýváme množinu všech afinních kombinací prvků množiny K . Označujeme symbolem $Aff(K)$.

$$Aff(K) = \{r^0 a_0 + r^k a_k | k \geq 1, a_0, \dots, a_k \in K, r^0 + \dots + r^k = 1\}$$



Theorem

Pro libovolnou neprázdnou množinu $K \subseteq A$ platí $Aff(Aff(K)) = Aff(K)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} a &\in Aff(Aff(K)) \\ a &= s^0(r^0 a_0 + r^1 a_1) + s^1(r^2 a_2 + r^3 a_3) \\ a &= s^0 r^0 a_0 + s^0 r^1 a_1 + s^1 r^2 a_2 + s^1 r^3 a_3 \\ a &\in Aff(K) \quad \square \end{aligned}$$



Neprázdná podmnožina B afinního prostoru A se zaměřením U se nazývá **afinní podprostor afinního prostoru A** , jestliže $Aff(B) = B$.



Theorem

Neprázdná podmnožina B afinního prostoru A se zaměřením U je jeho **afinním podprostorem**, právě když existuje vektorový podprostor $V \subseteq U$ takový, že jsou splněny následující podmínky:

- 1 $\forall a \in B, \forall u \in V$ platí $a + u \in B$
- 2 $\forall a, b \in B$ platí $b - a \in V$

Důkaz.

$$\begin{aligned} => \\ V &= \{c - b | b, c \in B\} \\ 1 \quad u &= (c - b), a + u = a + (c - b), \text{ což je rovno } AK \ a + c - b \text{ tedy prvek } B \\ 2 \quad &\text{triviální} \quad \square \end{aligned}$$



Důkaz.

<=

Předpokládáme, že existuje $V \subseteq U$ splňující podmínky. Chceme dokázat $Aff(B) = B$.

Stačí dokázat, že afinní kombinace libovolných dvou bodů z B je prvkem B .

$$b_0, b_1 \in B.$$

$$b = r^0 b_0 + r^1 b_1, r^0 + r^1 = 1$$

$$b = b_0 + r^0(b_0 - b_0) + r^1(b_1 - b_0) = b_0 + r^1(b_1 - b_0)$$

Z podmínky 2 víme, že $(b_1 - b_0) \in V$, $r^1(b_1 - b_0) \in V$.

Podmínka 1: $b \in B$ □



V je **zaměření APP B**.

Každý vektorový podprostor daného vektorového prostoru je jeho afinním podprostorem. Naopak to neplatí.



Theorem

Je-li A afinní prostor se zaměřením U a $B \subseteq A$ jeho afinní podprostor se zaměřením $V \subseteq U$, pak množina B spolu s vektorovým prostorem V a zobrazením $+_B : B \times V \rightarrow B$ vzniklým zúžením zobrazení $+_A$ je afinní prostor.

Důkaz.

Nutno ověřit podmínky AP, nebo postupovat jako v důkazu předchozí věty. □



Dimenze APP = dimenze AP se strukturou z předchozí věty.

Pokud je dimenze AP A rovna m a APP $B \subseteq A$ je dimenze $m - 1$, pak B nazýváme **nadrovinou v afinním prostoru A**.

Označení:

$$B = \{a \in A \mid a = a_0 + u, u \in V\}$$

$$B = a_0 + V$$



Theorem

Mějme afinní prostor A se zaměřením U .

- 1 Je-li $a_0 \in A$ bod a $V \subseteq U$ vektorový podprostor, pak množina $B = a_0 + V$ je podprostor afinního prostoru A , jehož zaměření je V .
- 2 Je-li B podprostor afinního prostoru A se zaměřením $V \subseteq U$, $a_0 \in B$ bod, pak $B = a_0 + V$.

Důkaz.

Plyne z předchozí věty. □

Parametrická rovnice



Je-li (u_1, \dots, u_m) báze vektorového podprostoru $V \subseteq U$, platí pro libovolný bod $a_0 \in A$:

$$a_0 + V = \{a \in A \mid a = a_0 + \sum_{i=1}^m t^i u_i, t^1, \dots, t^m \in \mathbb{R}\}.$$

Parametrická rovnice afinního podprostoru $a_0 + V$:

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^m t^i u_i$$