Souřadnicové systémy na afinních prostorech

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Afinní báze

Mějme AP A dimenze m se zaměřením U. Pro bod $a_0 \in A$ a bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_m)$ vektorového prostoru U nazýváme dvojici $\varphi = (\alpha, a_0)$ **afinní bází AP** A.

Počátek báze: bod a_0

Afinní souřadnice

Afinní souřadnice bodu a **vzhledem k afinní bázi** φ (souřadnicové vyjádření) pro libovolný bod $a \in A$

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} (a-a_0)^1_\alpha \\ \vdots \\ (a-a_0)^m_\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

Označení:
$(a-a_0)^1_\alpha = a^1_\varphi, \dots, (a-a_0)^m_\alpha = a^m_\varphi$

Zkrácené afinní souřadnice:

$$a_\varphi = \begin{bmatrix} (a-a_0)^1_\alpha \\ \vdots \\ (a-a_0)^m_\alpha \end{bmatrix}$$

Příklady afinních bází

- **Kanonická AB** $\mathbb{R}^n$:
  $a_0 = [0, \dots, 0]$ a α je kanonická báze $V = \mathbb{R}^n$

Součet bodu a vektoru

V afinních souřadnicích lze vyjádřit pomocí sčítání souřadnic, pokud k souřadnicím vektoru přidáme 0.

Označení: Pro vektor $u \in V$ a afinní bázi $\varphi = (\alpha, a_0)$
$u_\varphi = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Součet:
$(a+u)_\varphi = \begin{bmatrix} (a-a_0+u)_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a-a_0)_\alpha \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = a_\varphi + u_\varphi$

Parametrická rovnice APP:
$a_\varphi = (a_0)_\varphi + \sum t_i (u_i)_\varphi$

Rovnoběžnostěn určený bází φ

$\varphi = (u_1, \ldots, u_n, a_0)$

Rovnoběžnostěn určený bází φ množina všech bodů jejichž každá souřadnice vzhledem k této bázi leží v intervalu $< 0, 1 >$

$K = \{a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2 + \cdots + r^n u_n | \forall r^i \in < 0, 1 >\}$

- **úsečka**: rovnoběžnostěn v AP dim 1
- **rovnoběžník**: rovnoběžnostěn v AP dim 2

Rovnoběžnostěn určený bází φ

Máme-li lineárně nezávislé vektory $u_1, \ldots, u_k$, je $(k+1)$-tice $(u_1, \ldots, u_k, a_0)$ afinní bází jistého AP $B \subseteq A$ a určuje tedy rovnoběžnostěn v B

B je podmnožinou AP A a nazýváme ho **rovnoběžnostěn určený bodem** a_0 **a vektory** $u_1, \ldots, u_k$

Vrcholy rovnoběžnostěnu K: $a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2 + \cdots + r^k u_k$, kde všechny $r^i \in \{0, 1\}$

Matice přechodu mezi AB

AP A dimenze m se zaměřením U
$\varphi = (\alpha, a_0)$
$\psi = (\beta, b_0)$

Matice přechodu od AB φ **k AB** ψ

$$M_{\psi\varphi} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\beta\alpha} & (a_0)_\beta \\ \hline 0 \ \ldots \ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matice přechodu mezi AB

- $M_{\varphi'\overline{\varphi}} \cdot M_{\overline{\varphi}\varphi} = M_{\varphi'\varphi}$
- $M_{\varphi'\varphi} \cdot M_{\varphi\varphi'} = E$

Barevné modely

- RGB a CMY
- YUV a RGB

$$M_{\varphi_{YUV}\varphi_{RGB}} \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0 \\ -0.147 & -0.288 & 0.436 & 0 \\ 0.615 & -0.515 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\varphi_{RGB}\varphi_{YUV}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.140 & 0 \\ 1 & -0.395 & -0.581 & 0 \\ 1 & 2.032 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Barevné modely

- YIQ a RGB

$$M_{\varphi_{YIQ}\varphi_{RGB}} \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 & 0 \\ 0.596 & -0.274 & -0.321 & 0 \\ 0.212 & -0.523 & 0.311 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\varphi_{RGB}\varphi_{YIQ}} \begin{pmatrix} 1 & 0.956 & 0.621 & 0 \\ 1 & -0.272 & -0.647 & 0 \\ 1 & -0.107 & 1.704 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- CMY a YUV?
- YIQ a YUV?
- Další modely: HSV, HSL

Body v obecné poloze

Body $a_0, \dots, a_k$ jsou v **obecné poloze**, jestliže žádný z nich není afinní kombinací ostatních.

Neexistuje číslo $i \in \{0, \dots, k\}$ a čísla $r^0, \dots, r^{i-1}, r^{i+1}, \dots, r^k$ taková, že $r^0 + \dots + r^{i-1} + r^{i+1} + \dots + r^k = 1$ a
$a_i = r^0 a_0 + \dots + r^{i-1} a_{i-1} + r^{i+1} a_{i+1} + \dots + r^k a_k$

- Pokud jsou $a_0, \dots, a_k$ v obecné poloze, pak $(a_1 - a_0), (a_2 - a_0), \dots, (a_k - a_0)$ jsou lineárně nezávislé vektory.
- Pokud jsou $a_0, \dots, a_k$ v obecné poloze, pak dimenze afinního obalu bodů a_i je rovna k.
- Pokud pro dvě afinní kombinace $r^0 a_0 + \dots + r^k a_k = \overline{r}^0 a_0 + \dots + \overline{r}^k a_k$, pak $r^0 = \overline{r}^0, \dots, r^k = \overline{r}^k$.

Bodové báze

AP A dimenze m. Existuje $(m+1)$ bodů, které jsou v obecné poloze $(a_0, \dots, a_m \in A)$.

Bodová báze A: $\varphi = (a_0, \dots, a_m)$

Pro každý bod $a \in A$, existuje právě 1 $(m+1)$-tice $r^0, \dots, r^m$ taková, že $r^0 + \dots + r^m = 1$ a $a = r^0 a_0 + \dots + r^m a_m$

Barycentrické souřadnice bodu a vzhledem k bodové bázi φ: $[r^0, \dots, r^m]$

Bodové báze

AP A dimenze m. Bodové báze:
$\varphi = (a_0, \dots, a_m)$
$\overline{\varphi} = (\overline{a}_0, \dots, \overline{a}_m)$

Matice přechodu od bodové báze φ k bodové bázi $\overline{\varphi}$:

$$M_{\overline{\varphi}\varphi} = \begin{pmatrix} (a_0)^0_{\overline{\varphi}} & \dots & (a_m)^0_{\overline{\varphi}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_0)^m_{\overline{\varphi}} & \dots & (a_m)^m_{\overline{\varphi}} \end{pmatrix}$$

Platí:

- $a_{\overline{\varphi}} = M_{\overline{\varphi}\varphi} a_{\varphi}$
- $M_{\overline{\varphi}\varphi'} \cdot M_{\varphi'\varphi} = M_{\overline{\varphi}\varphi}$
- $M_{\overline{\varphi}\varphi} \cdot M_{\varphi\overline{\varphi}} = E$