

Afinní zobrazení

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.



Palacký University, Olomouc



AP A se zaměřením U a AP B se zaměřením V

Afinní zobrazení $f : A \rightarrow B$ jestliže pro libovolné dva body $a_1, a_2 \in A$ a libovolnou jejich afinní kombinaci $r^1 a_1 + r^2 a_2$ ($r^1 + r^2 = 1$) platí

$$f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)$$

Obecně:

$$f(r^0 a_0 + \dots + r^k a_k) = r^0 f(a_0) + \dots + r^k f(a_k)$$



$$f : A \rightarrow B$$

- **Konstantní zobrazení:**

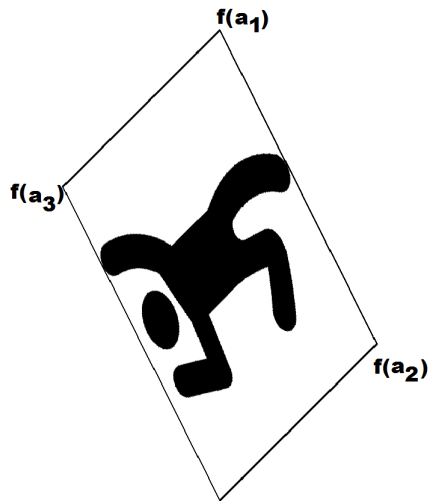
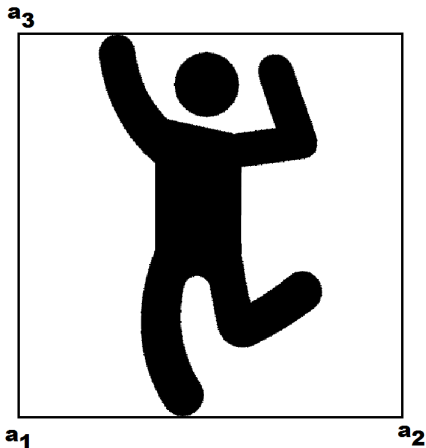
$$f(a) = b_0, \forall a \in A$$

- **Identita:**

$$f(a) = a$$



Afinní zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v prvcích bodové báze.



Theorem

Kompozice dvou afinních zobrazení je afinní zobrazení.

Důkaz.

$f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$. Chceme ukázat $f \circ g$ je afinní zobrazení.

Pro lib. body $a_1, a_2 \in A$ a $r^1, r^2 \in \mathbb{R}$ ($r^1 + r^2 = 1$) platí:

$$f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2).$$

$$(f \circ g)(r^1 a_1 + r^2 a_2) = g(f(r^1 a_1 + r^2 a_2)) = g(r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)) = r^1 g(f(a_1)) + r^2 g(f(a_2)) = r^1 (f \circ g)(a_1) + r^2 (f \circ g)(a_2)$$





Theorem

Mějme AZ $f : A \rightarrow B$ a afinní podprostory $C \subseteq A$ a $D \subseteq B$. Pak $f(C) \subseteq B$ je afinní podprostor afinního prostoru B a pokud množina $f^{-1}(D)$ je neprázdná, je afinním podprostorem AP A .

Důkaz.

Důkaz 1. části: $f(C)$ je APP B .

$b_1, b_2 \in f(C)$, $r^1, r^2 \in \mathbb{R}$ ($r^1 + r^2 = 1$).

Chceme dokázat, že $r^1 f(b_1) + r^2 f(b_2) \in f(C)$.

$b_1, b_2 \in f(C)$, $\exists a_1, a_2 \in C$: $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$.

C je AP platí tedy $r^1 a_1 + r^2 a_2 \in C$, tedy $f(r^1 a_1 + r^2 a_2) \in f(C)$.

f je AZ tedy podle def.: $f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2) = r^1 b_1 + r^2 b_2$.

2. část obdobně.





Afinní transformace AP A: afinní zobrazení $f : A \rightarrow A$

Afinní projekce na APP AP A: je taková afinní transformace $f : A \rightarrow A$, kde pro každé $a \in A$ platí $f(f(a)) = f(a)$.

Každé surjektivní afinní zobrazení $f : A \rightarrow A$ nazýváme **afinní projekce**.



- **Translace** (posunutí o vektor u_0): $f(a) = a + u_0$
- **Identita**: $f(a) = a$



- **Konstantní zobrazení:** $f(a) = a_0$



Theorem

Mějme AZ $f : A \rightarrow B$. Pokud pro 4 body $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ platí $a_2 - a_1 = a_4 - a_3$, pak $f(a_2) - f(a_1) = f(a_4) - f(a_3)$.

Důkaz.

$$a_4 = a_3 + (a_2 - a_1)$$

$a_4 = a_3 + a_2 - a_1$, AK bodů a_1, a_2, a_3 s koeficienty $-1, 1, 1$

$$f(a_4) = f(a_3) + f(a_2) - f(a_1)$$

$$f(a_4) = f(a_3) + (f(a_2) - f(a_1))$$

$$f(a_4) - f(a_3) = f(a_2) - f(a_1)$$



Podřízené lineární zobrazení

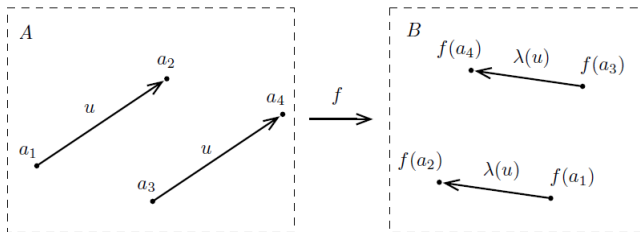


Označení: $a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = u$

$$f(a_1 + u) - f(a_1) = f(a_3 + u) - f(a_3)$$

$$\lambda(u) = f(a_0 + u) - f(a_0)$$

$\lambda(u) = f(a_0 + u) - f(a_0)$ definuje zobrazení $\lambda : U \rightarrow V$



Zobrazení podřízené afinnímu zobrazení f : $\lambda(u) = f(a_0 + u) - f(a_0)$



$$f(a_0 + u) = f(a_0) + \lambda(u)$$

Označení: $a_0 + u = a$

$$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0)$$

Theorem

Podřízené zobrazení libovolného afinního zobrazení je lineární.

Důkaz.

$f : A \rightarrow B$ je AZ a λ je jeho podřízené zobrazení.

$$\lambda(r^1u_1 + r^2u_2) = f(a_0 + r^1u_1 + r^2u_2) - f(a_0)$$

Označení: $a_0 + u_1 = b_1$, $a_0 + u_2 = b_2$

Bod $a_0 + r^1u_1 + r^2u_2$ je roven AK $(1 - r^1 - r^2)a_0 + r^1b_1 + r^2b_2$

$$f(a_0 + r^1u_1 + r^2u_2) = f((1 - r^1 - r^2)a_0 + r^1b_1 + r^2b_2) = (1 - r^1 - r^2)f(a_0) + r^1f(b_1) + r^2f(b_2)$$

$$f(b_1) = f(a_0) + \lambda(u_1), \quad f(b_2) = f(a_0) + \lambda(u_2)$$

$$(1 - r^1 - r^2)f(a_0) + r^1f(b_1) + r^2f(b_2) = f(a_0) + r^1\lambda(u_1) + r^2\lambda(u_2)$$

Tedy:

$$\lambda(r^1u_1 + r^2u_2) = f(a_0 + r^1u_1 + r^2u_2) - f(a_0) = f(a_0) + r^1\lambda(u_1) + r^2\lambda(u_2) - f(a_0) = r^1\lambda(u_1) + r^2\lambda(u_2).$$

λ je lineární. □

Theorem

Pro libovolné 2 body $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$ a lineární zobrazení $\lambda : U \rightarrow V$ existuje právě 1 afinní zobrazení $f : A \rightarrow B$ takové, že $f(a_0) = b_0$ a λ je podřízené zobrazení zobrazení f .

Důkaz.

Pokud známe hodnotu zobrazení v bodě a_0 a podřízené zobrazení λ , jsou hodnoty ostatních bodů jednoznačně určeny. Existuje tedy nejvýše jedno:

$$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0)$$

Musíme dokázat, že f je afinní a λ je jeho podřízené zobrazení.

$$a_1, a_2 \in A, r^1, r^2 \in \mathbb{R} (r^1 + r^2 = 1)$$

$$f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = b_0 + \lambda(r^1 a_1 + r^2 a_2 - a_0) = b_0 + \lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) =$$

$$b_0 + r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)$$

f je afinní zobrazení

Hodnota podřízeného zobrazení:

$$f(a_0 + u) - f(a_0) = f(a_0) + \lambda(u) - f(a_0) = \lambda(u)$$

λ je podřízené zobrazení





Afinní zobrazení je zobrazení mezi AP takové, že každé 3 body ležící v jedné přímce zobrazí buď do 1 bodu, nebo do 3 různých bodů a v tom případě zachovává jejich dělicí poměr.

Analytické vyjádření: složení posunutí a lineárního zobrazení