Afinní zobrazení

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Afinní zobrazení

AP A se zaměřením U a AP B se zaměřením V

Afinní zobrazení $f : A \to B$ jestliže pro libovolné dva body $a_1, a_2 \in A$ a libovolnou jejich afinní kombinaci $r^1 a_1 + r^2 a_2$ $(r^1 + r^2 = 1)$ platí $f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)$

Obecně:
$f(r^0 a_0 + \cdots + r^k a_k) = r^0 f(a_0) + \cdots + r^k f(a_k)$

Příklady afinního zobrazení

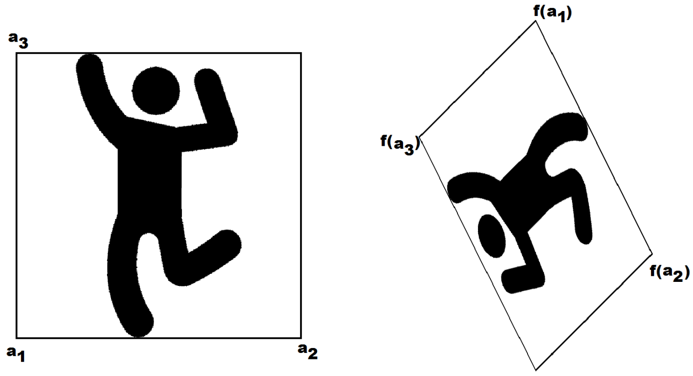
$f : A \to B$

- **Konstantní zobrazení**:
  $f(a) = b_0, \forall a \in A$
- **Identita**:
  $f(a) = a$

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení je jednoznačně určeno hodnotami v prvcích bodové báze.

Afinní zobrazení



Kompozice afinních zobrazení

Theorem

Kompozice dvou afinních zobrazení je afinní zobrazení.

Důkaz.

$f : A \to B$, $g : B \to C$. Chceme ukázat $f \circ g$ je afinní zobrazení.
Pro lib. body $a_1, a_2 \in A$ a $r^1, r^2 \in \mathbb{R}$ $(r^1 + r^2 = 1)$ platí:
$f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)$.
$(f \circ g)(r^1 a_1 + r^2 a_2) = g(f(r^1 a_1 + r^2 a_2)) = g(r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)) =$
$r^1 g(f(a_1)) + r^2 g(f(a_2)) = r^1 (f \circ g)(a_1) + r^2 (f \circ g)(a_2)$

□

Afinních zobrazení a APP

Theorem

Mějme AZ $f : A \to B$ a afinní podprostory $C \subseteq A$ a $D \subseteq B$. Pak $f(C) \subseteq B$ je afinní podprostor afinního prostoru B a pokud množina $f^{-1}(D)$ je neprázdná, je afinním podprostorem AP A.

Důkaz.

Důkaz 1. části: $f(C)$ je APP B.
$b_1, b_2 \in f(C)$, $r^1, r^2 \in \mathbb{R}$ $(r^1 + r^2 = 1)$.
Chceme dokázat, že $r^1 f(b_1) + r^2 f(b_2) \in f(C)$.
$b_1, b_2 \in f(C)$, $\exists a_1, a_2 \in C$: $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$.
C je AP platí tedy $r^1 a_1 + r^2 a_2 \in C$, tedy $f(r^1 a_1 + r^2 a_2) \in f(C)$.
f je AZ tedy podle def.:
$f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2) = r^1 b_1 + r^2 b_2$.

2. část obdobně.

□

Afinní zobrazení

Afinní transformace AP A: afinní zobrazení $f : A \to A$

Afinní projekce na APP AP A: je taková afinní transformace $f : A \to A$, kde pro každé $a \in A$ platí $f(f(a)) = f(a)$.
Každé surjektivní afinní zobrazení $f : A \to A$ nazýváme **afinní projekce**.

Příklady afinní transformace

- **Translace** (posunutí o vektor u_0): $f(a) = a + u_0$
- **Identita**: $f(a) = a$

Příklad afinní projekce

- **Konstantní zobrazení**: $f(a) = a_0$

Podřízené lineární zobrazení

Theorem

Mějme AZ $f : A \to B$. *Pokud pro 4 body* $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ *platí*
$a_2 - a_1 = a_4 - a_3$, *pak*
$f(a_2) - f(a_1) = f(a_4) - f(a_3)$.

Důkaz.

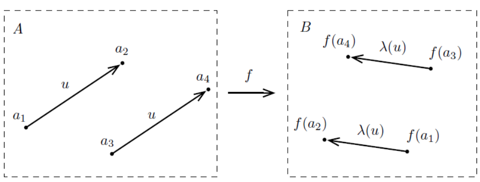
$a_4 = a_3 + (a_2 - a_1)$
$a_4 = a_3 + a_2 - a_1$, AK bodů a_1, a_2, a_3 s koeficienty $-1, 1, 1$
$f(a_4) = f(a_3) + f(a_2) - f(a_1)$
$f(a_4) = f(a_3) + (f(a_2) - f(a_1))$
$f(a_4) - f(a_3) = f(a_2) - f(a_1)$

$\square$

Podřízené lineární zobrazení

Označení: $a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = u$
$f(a_1 + u) - f(a_1) = f(a_3 + u) - f(a_3)$
$\lambda(u) = f(a_0 + u) - f(a_0)$

$\lambda(u) = f(a_0 + u) - f(a_0)$ definuje zobrazení $\lambda : U \to V$



Zobrazení podřízené afinnímu zobrazení f: $\lambda(u) = f(a_0 + u) - f(a_0)$

Podřízené lineární zobrazení

$f(a_0 + u) = f(a_0) + \lambda(u)$
Označení: $a_0 + u = a$
$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0)$

Podřízené lineární zobrazení

Theorem

Podřízené zobrazení libovolného afinního zobrazení je lineární.

Důkaz.

$f : A \to B$ je AZ a λ je jeho podřízené zobrazení.
$\lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) = f(a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2) - f(a_0)$
Označení: $a_0 + u_1 = b_1$, $a_0 + u_2 = b_2$
Bod $a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2$ je roven AK $(1 - r^1 - r^2)a_0 + r^1 b_1 + r^2 b_2$
$f(a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2) = f((1 - r^1 - r^2)a_0 + r^1 b_1 + r^2 b_2) =$
$(1 - r^1 - r^2)f(a_0) + r^1 f(b_1) + r^2 f(b_2)$
$f(b_1) = f(a_0) + \lambda(u_1)$, $f(b_1) = f(a_0) + \lambda(u_1)$
$(1 - r^1 - r^2)f(a_0) + r^1 f(b_1) + r^2 f(b_2) = f(a_0) + r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2)$
Tedy:
$\lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) = f(a_0 + r^1 u_1 + r^2 u_2) - f(a_0) =$
$f(a_0) + r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2) - f(a_0) = r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2)$.
λ je lineární. □

Podřízené lineární zobrazení

Theorem

Pro libovolné 2 body $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$ a lineární zobrazení $\lambda : U \to V$ existuje právě 1 adinní zobrazení $f : A \to B$ takové, že $f(a_0) = b_0$ a λ je podřízené zobrazení zobrazení f.

Důkaz.

Pokud známe hodnotu zobrazení v bodě a_0 a podřízené zobrazení λ, jsou hodnoty ostatních bodů jednoznačně určeny. Existuje tedy nejvýše jedno:
$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0)$
Musíme dokázat, že f je afinní a λ je jeho podřízené zobrazení.
$a_1, a_2 \in A$, $r^1, r^2 \in \mathbb{R}$ $(r^1 + r^2 = 1)$
$f(r^1 a_1 + r^2 a_2) = b_0 + \lambda(r^1 a_1 + r^2 a_2 - a_0) = b_0 + \lambda(r^1 u_1 + r^2 u_2) =$
$b_0 + r^1 \lambda(u_1) + r^2 \lambda(u_2) = r^1 f(a_1) + r^2 f(a_2)$
f je afinní zobrazení
Hodnota podřízeného zobrazení:
$f(a_0 + u) - f(a_0) = f(a_0) + \lambda(u) - f(a_0) = \lambda(u)$
λ je podřízené zobrazení □

Afinní zobrazení

Afinní zobrazení je zobrazení mezi AP takové, že každé 3 body ležící v jedné přímce zobrazí buď do 1 bodu, nebo do 3 různých bodů a v tom případě zachovává jejich dělící poměr.

Analytické vyjádření: složení posunutí a lineárního zobrazení