Vlastnosti afinních zobrazení

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím

AB AP A se zaměřením U: $\varphi = (\alpha, a_0)$, $\alpha = \{u_1, \dots, u_m\}$
AB AP B se zaměřením V: $\psi = (\beta, b_0)$, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$
Afinní zobrazení $f : A \to B$, s podřízeným zobrazením $\lambda : U \to V$

Známe a_φ $(a \in A)$, chceme $f(a)_\psi$

$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0)$
$(a + u)_\varphi = a_\varphi + u_\varphi$
$u_\varphi = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_\varphi = \begin{pmatrix} (a - a_0)_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$
Matice lin. zobrazení vzhledem k bázím α a β

$$M^\lambda_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda(u_1)^1_\beta & \dots & \lambda(u_m)^1_\beta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(u_1)^n_\beta & \dots & \lambda(u_m)^b_\beta \end{pmatrix}$$

Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím

$$f(a)_\psi = \lambda(a-a_0)_\psi + f(a_0)_\psi = \begin{pmatrix} M^\lambda_{\beta\alpha}(a-a_0)_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + f(a_0)_\psi = \begin{pmatrix} M^\lambda_{\beta\alpha} \\ 0\dots 0 \end{pmatrix} \cdot (a-a_0)_\alpha + f(a_0)_\psi$$

$$M^f_{\psi\varphi} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M^\lambda_{\beta\alpha} & & f(a_0)_\beta \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$f(a)_\psi = M^f_{\psi\varphi} \cdot a_\varphi$$

Matice afinního zobrazení f vzhledem k bázím φ a ψ: $M^f_{\psi\varphi}$

Příklady AZ

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
  $$M^f = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  $$f(a) = pa + q$$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
  $$M^f = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice identického zobrazení

Theorem

Matice identického zobrazení $id_A : A \to A$ *vzhledem k afinním bazím* φ, ψ *je rovna matici přechodu mezi těmito bazemi:*
$M_{\psi\varphi}^{id_A} = M_{\psi\varphi}$.

Důkaz.

f - identita

$$M_{\psi\varphi}^{f} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M_{\beta\alpha}^{\lambda} & & f(a_0)_\beta \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & M_{\beta\alpha}^{\lambda} & & (a_0)_\beta \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_{\psi\varphi} = \left(\begin{array}{ccc|c} & M_{\beta\alpha} & & (a_0)_\beta \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

□

Matice zobrazení

Theorem

Pro afinní zobrazení $f : A \to B$ *a afinní báze* φ, φ' *prostoru* A *a* ψ, ψ' *prostoru* B *platí:*
$M^f_{\psi'\varphi'} = M_{\psi'\psi} \cdot M^f_{\psi\varphi} \cdot M_{\varphi\varphi'}$

Důkaz.

Víme, že pro libovolný bod $a \in A$ platí $f(a)\psi' = M^f_{\psi'\varphi'} \cdot a_{\varphi'}$. Vynásobíme-li matici na pravé straně vektorem $a_{\varphi'}$, dostaneme stejný výsledek.

$$
\begin{aligned}
& M_{\psi'\psi} \cdot M^f_{\psi\varphi} \cdot M_{\varphi\varphi'} \cdot a_{\varphi'} \\
&= M_{\psi'\psi} \cdot (M^f_{\psi\varphi} \cdot (M_{\varphi\varphi'} \cdot a_{\varphi'})) \\
&= M_{\psi'\psi} \cdot (M^f_{\psi\varphi} \cdot a_{\varphi}) \\
&= M_{\psi'\psi} \cdot f(a)_{\psi} \\
&= f(a)_{\psi'}
\end{aligned}
$$

□

Obecná rovnice afinního podprostoru

surjektivní afinní zobrazení $f : A \to B$
$A = \mathbb{R}^m$, $B = \mathbb{R}^n$
$B = \{b \in A | f(b) = 0\}$ je afinní podprostor AP A $dim(B) = n$

Obecná rovnice afinního podprostoru B: $f(b) = 0$

Theorem

Každý afinní podprostor má obecnou rovnici.