

Vlastnosti afinních zobrazení

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.



Palacký University, Olomouc

Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím



AB AP A se zaměřením $U: \varphi = (\alpha, a_0)$, $\alpha = \{u_1, \dots, u_m\}$

AB AP B se zaměřením $V: \psi = (\beta, b_0)$, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$

Afinní zobrazení $f: A \rightarrow B$, s podřízeným zobrazením $\lambda: U \rightarrow V$

Známe a_φ ($a \in A$), chceme $f(a)_\psi$

$$f(a) = f(a_0) + \lambda(a - a_0)$$

$$(a + u)_\varphi = a_\varphi + u_\varphi$$

$$u_\varphi = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, a_\varphi = \begin{pmatrix} (a - a_0)_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matice lin. zobrazení vzhledem k bázím α a β

$$M_{\beta\alpha}^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda(u_1)_\beta^1 & \dots & \lambda(u_m)_\beta^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda(u_1)_\beta^n & \dots & \lambda(u_m)_\beta^n \end{pmatrix}$$

Matice afinního zobrazení vzhledem k afinním bazím



$$f(a)_\psi = \lambda(a - a_0)_\psi + f(a_0)_\psi = \begin{pmatrix} M_{\beta\alpha}^\lambda (a - a_0)_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + f(a_0)_\psi = \begin{pmatrix} M_{\beta\alpha}^\lambda \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} \cdot (a - a_0)_\alpha + f(a_0)_\psi$$

$$M_{\psi\varphi}^f = \left(\begin{array}{c|c} M_{\beta\alpha}^\lambda & f(a_0)_\beta \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$f(a)_\psi = M_{\psi\varphi}^f \cdot a_\varphi$$

Matice afinního zobrazení f vzhledem k bázím φ a ψ : $M_{\psi\varphi}^f$

Příklady AZ



■ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$M^f = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(a) = pa + q$$

■ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$M^f = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice identického zobrazení



Theorem

Matice identického zobrazení $id_A : A \rightarrow A$ vzhledem k afinním bazím φ, ψ je rovna matici přechodu mezi těmito bazemi:

$$M_{\psi\varphi}^{id_A} = M_{\psi\varphi}.$$

Důkaz.

f - identita

$$M_{\psi\varphi}^f = \left(\begin{array}{c|c} M_{\beta\alpha}^\lambda & f(a_0)_\beta \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\beta\alpha}^\lambda & (a_0)_\beta \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$M_{\psi\varphi} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\beta\alpha} & (a_0)_\beta \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right) \quad \square$$

Matice zobrazení



Theorem

Pro afinní zobrazení $f : A \rightarrow B$ a afinní báze φ, φ' prostoru A a ψ, ψ' prostoru B platí:

$$M_{\psi'\varphi'}^f = M_{\psi'\psi} \cdot M_{\psi\varphi}^f \cdot M_{\varphi\varphi'}$$

Důkaz.

Víme, že pro libovolný bod $a \in A$ platí $f(a)\psi' = M_{\psi'\varphi'}^f \cdot a_{\varphi'}$. Vynásobíme-li matici na pravé straně vektorem $a_{\varphi'}$, dostaneme stejný výsledek.

$$M_{\psi'\psi} \cdot M_{\psi\varphi}^f \cdot M_{\varphi\varphi'} \cdot a_{\varphi'} \\ = M_{\psi'\psi} \cdot (M_{\psi\varphi}^f \cdot (M_{\varphi\varphi'} \cdot a_{\varphi'})) \\ = M_{\psi'\psi} \cdot (M_{\psi\varphi}^f \cdot a_\varphi) \\ = M_{\psi'\psi} \cdot f(a)_\psi \\ = f(a)_{\psi'} \quad \square$$

Obecná rovnice afinního podprostoru



surjektivní afinní zobrazení $f : A \rightarrow B$

$$A = \mathbb{R}^m, B = \mathbb{R}^n$$

$B = \{b \in A \mid f(b) = 0\}$ je afinní podprostor AP A $\dim(B) = n$

Obecná rovnice afinního podprostoru B : $f(b) = 0$

Theorem

Každý afinní podprostor má obecnou rovnici.