# Vzájemná poloha afinních podprostorů

## Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

# Vzájemná poloha

APP $B$, $B'$ se zaměřeními $V$ a $V'$ AP $A$ se zaměřením $U$

- **Rovnoběžné**: pokud platí $V \subseteq V'$ nebo $V' \subseteq V$
- **Různoběžné**: pokud nejsou rovnoběžné a pokud $B \cap B' \neq \emptyset$
- **Mimoběžné**: ve všech ostatních případech

# Incidentní prostory

**Theorem**

*Předpokládejme, že APP $B$, $B'$ se zaměřeními $V$ a $V'$ jsou rovnoběžné a že $V' \subseteq V$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje bod $b_0 \in B \cap B'$*
2. $B' \subseteq B$
3. *Pro každé dva body $b \in B$ a $b' \in B'$ platí $b' - b \in V$*
4. *Existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že $b' - b \in V$*

# Incidentní prostory

## Důkaz.

$1 \to 2$:
Předpokládejme, že existuje bod $b_0 \in B \cap B'$. Zvolíme $b' \in B'$, jelikož $b_0 \in B'$, pak $b' - b_0 \in V'$.
$V' \subseteq V$, tak $b' - b_0 \in V$. Jelikož jelikož $b_0 \in B$, tak $b' \in B$.
Takže $B' \subseteq B$.

$2 \to 3$:
Máme body $b \in B$ a $b' \in B'$. Podle 2 $b' \in B$. Takže $b' - b \in V$.

$3 \to 4$:
Platí, protože podprostory jsou neprázdné a konečné.

$4 \to 1$:
Z podmínky 4. $b' = b + (b' - b) \in B$. 1 splněna pro bod $b_0 = b'$. □

# Různoběžné prostory

**Theorem**

*Předpokládejme, že APP $B$, $B'$ se zaměřeními $V$ a $V'$ nejsou rovnoběžné. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$B$ a $B'$ jsou různoběžné*
2. *Pro každé dva body $b \in B$ a $b' \in B'$ platí $b' - b \in V \vee V'$*
3. *Existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že $b' - b \in V \vee V'$*

# Různoběžné prostory

## Důkaz.

$1 \to 2$:

$b \in B$, $b' \in B'$, $b_0 \in B \cap B'$. $b_0 - b \in V$, pak $b' - b_0 \in V'$.

Součet vektorů leží ve $V \vee V'$. Tj. $(b_0 - b) + (b' - b_0) \in V \vee V'$. $(b_0 - b) + (b' - b_0) = b' - b$.

$2 \to 3$:

Platí, protože podprostory jsou neprázdné a konečné.

$3 \to 1$:

Předpoklad: $b' - b \in V \vee V'$. Existují vektory $v \in V$ a $v' \in V'$ takové, že $b' - b = v + v'$.

$b' - v' = b + v$.

Nalezli jsme bod ležící v $B$ (součet $b \in B$ a $v \in V$).

Současně leží v $B'$ ($b' \in B'$ a $v' \in V'$).

$B$ a $B'$ jsou různoběžné. $\square$

# Mimoběžné prostory

Pokud není splněna podmínka 2 z předchozí věty ($b' - b \notin V \vee V'$) $\rightarrow$ prostory jsou **mimoběžné**.

# Poloha prostorů

$B = \{b_0, u_1, \dots, u_m\}$, $B' = \{b'_0, u'_1, \dots, u'_n\}$, $dim B = m$, $dim B' = n$, $m \leq n$
množina generátorů VP $W = \{u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots u'_n, b_0 - b'_0\}$

- **incidentní**: $u_1, \dots, u_m$ jsou LK $u'_1, \dots u'_n$
  $b_0 - b'_0$ je LK $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots u'_n$
  $dim W = n$
- **rovnoběžné**:$u_1, \dots, u_m$ jsou LK $u'_1, \dots u'_n$
  $b_0 - b'_0$ není LK $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots u'_n$
  $dim W = n + 1$
- **různoběžné**:$u_1, \dots, u_m$ nejsou LK $u'_1, \dots u'_n$
  $b_0 - b'_0$ je LK $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots u'_n$
  $dim W \in < n + 1, n + m >$
- **mimoběžné**:$u_1, \dots, u_m$ nejsou LK $u'_1, \dots u'_n$
  $b_0 - b'_0$ není LK $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots u'_n$
  $dim W \in < n + 2, n + m + 1 >$

# Příčka mimoběžek

AP $A$ dimenze 3
APP $B, B' \subseteq A$ mimoběžné přímky

**příčka mimoběžek** $=$ je libovolná přímka $C \subseteq A$, která má neprázdný průnik s každou z přímek $B$ a $B'$

- příčka mimoběžek, která má zadaný směrový vektor
- příčka mimoběžek procházející zadaným bodem

# Příčka se zadaným vektorem

## Theorem

*Mějme dvě mimoběžné přímky $B$ a $B'$ se zaměřeními $V$ a $V'$ v trojrozměrném AP $A$ se zaměřením $U$. Dále uvažujme nenulový vektor $w \in U$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje příčka mimoběžek $B$ a $B'$ se směrovým vektorem $w$.*
2. $w \notin V \vee V'$

## Důkaz.

Existence přímky se směrovým vektorem $w$ znamená, že existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že $b' - b$ je násobkem vektoru $w$.
$b' - b \notin V \vee V'$ (byly by různoběžné). Tedy $w \notin V \vee V'$ □

# Příčka procházející bodem

## Theorem

*Mějme dvě mimoběžné přímky $B = b_0 + V$ a $B' = b'_0 + V'$ v trojrozměrném AP $A$ se zaměřením $U$ a bod $c_0 \in A$ ($c_0 \notin B$, $c_0 \notin B'$). Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje příčka mimoběžek $B$ a $B'$ obsahující bod $c_0$.*
2. $c_0 \notin b_0 + V \vee V'$ a $c_0 \notin b'_0 + V \vee V'$

## Důkaz.

Předpokládáme, že $c_0 \notin B$, $c_0 \notin B'$ Pokud $c_0$ leží na jedné z přímek, existuje nekonečně mnoho příček.
$\exists c \in B$ průsečík příčky s přímkou $B$. $c_0 - c$ je směrový vektor příčky.
Podle předchozí věty $c_0 - c \notin V \vee V'$. $c - b_0 \in V$.
$(c - b_0) + (c_0 - c) \notin V \vee V' \to (c_0 - b_0) \notin V \vee V' \to c_0 \notin b_0 + V \vee V'$ □