

Vzájemná poloha afinních podprostorů

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.



Palacký University, Olomouc

Vzájemná poloha



APP B, B' se zaměřenými V a V' AP A se zaměřením U

- **Rovnoběžné:** pokud platí $V \subseteq V'$ nebo $V' \subseteq V$
- **Různoběžné:** pokud nejsou rovnoběžné a pokud $B \cap B' \neq \emptyset$
- **Mimoběžné:** ve všech ostatních případech

Incidentní prostory



Theorem

Předpokládejme, že APP B, B' se zaměřenými V a V' jsou rovnoběžné a že $V' \subseteq V$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- 1 Existuje bod $b_0 \in B \cap B'$
- 2 $B' \subseteq B$
- 3 Pro každé dva body $b \in B$ a $b' \in B'$ platí $b' - b \in V$
- 4 Existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že $b' - b \in V$

Incidentní prostory



Důkaz.

1 \rightarrow 2:

Předpokládejme, že existuje bod $b_0 \in B \cap B'$. Zvolíme $b' \in B'$, jelikož $b_0 \in B'$, pak $b' - b_0 \in V'$.

$V' \subseteq V$, tak $b' - b_0 \in V$. Jelikož jelikož $b_0 \in B$, tak $b' \in B$.

Takže $B' \subseteq B$.

2 \rightarrow 3:

Máme body $b \in B$ a $b' \in B'$. Podle 2 $b' \in B$. Takže $b' - b \in V$.

3 \rightarrow 4:

Platí, protože podprostory jsou neprázdné a konečné.

4 \rightarrow 1:

Z podmínky 4. $b' = b + (b' - b) \in B$. 1 splněna pro bod $b_0 = b'$. \square



Theorem

Předpokládejme, že APP B, B' se zaměřenými V a V' nejsou rovnoběžné. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- 1 B a B' jsou různoběžné
- 2 Pro každé dva body $b \in B$ a $b' \in B'$ platí $b' - b \in V \vee V'$
- 3 Existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že $b' - b \in V \vee V'$



Důkaz.

1 \rightarrow 2:

$b \in B, b' \in B', b_0 \in B \cap B'. b_0 - b \in V$, pak $b' - b_0 \in V'$.

Součet vektorů leží ve $V \vee V'$. Tj. $(b_0 - b) + (b' - b_0) \in V \vee V'$.

$$(b_0 - b) + (b' - b_0) = b' - b.$$

2 \rightarrow 3:

Platí, protože podprostory jsou neprázdné a konečné.

3 \rightarrow 1:

Předpoklad: $b' - b \in V \vee V'$. Existují vektory $v \in V$ a $v' \in V'$ takové, že $b' - b = v + v'$. $b' - v' = b + v$.

Nalezli jsme bod ležící v B (součet $b \in B$ a $v \in V$).

Současně leží v B' ($b' \in B'$ a $v' \in V'$).

B a B' jsou různoběžné. □



Pokud není splněna podmínka 2 z předchozí věty ($b' - b \notin V \vee V'$) \rightarrow prostory jsou **mimoběžné**.



$B = \{b_0, u_1, \dots, u_m\}, B' = \{b'_0, u'_1, \dots, u'_n\}, \dim B = m, \dim B' = n, m \leq n$

množina generátorů VP $W = \{u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots, u'_n, b_0 - b'_0\}$

- **incidentní**: u_1, \dots, u_m jsou LK u'_1, \dots, u'_n
 $b_0 - b'_0$ je LK $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots, u'_n$
 $\dim W = n$
- **rovnoběžné**: u_1, \dots, u_m jsou LK u'_1, \dots, u'_n
 $b_0 - b'_0$ není LK $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots, u'_n$
 $\dim W = n + 1$
- **různoběžné**: u_1, \dots, u_m nejsou LK u'_1, \dots, u'_n
 $b_0 - b'_0$ je LK $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots, u'_n$
 $\dim W \in \langle n + 1, n + m \rangle$
- **mimoběžné**: u_1, \dots, u_m nejsou LK u'_1, \dots, u'_n
 $b_0 - b'_0$ není LK $u_1, \dots, u_m, u'_1, \dots, u'_n$
 $\dim W \in \langle n + 2, n + m + 1 \rangle$

AP A dimenze 3APP $B, B' \subseteq A$ mimoběžné přímky

příčka mimoběžek = je libovolná přímka $C \subseteq A$, která má neprázdný průnik s každou z přímek B a B'

- příčka mimoběžek, která má zadaný směrový vektor
- příčka mimoběžek procházející zadaným bodem

Příčka se zadaným vektorem



Theorem

Mějme dvě mimoběžné přímky B a B' se zaměřeními V a V' v trojrozměrném AP A se zaměřením U . Dále uvažujme nenulový vektor $w \in U$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- 1 Existuje příčka mimoběžek B a B' se směrovým vektorem w .
- 2 $w \notin V \vee V'$

Důkaz.

Existence přímky se směrovým vektorem w znamená, že existují body $b \in B$ a $b' \in B'$ takové, že $b' - b$ je násobkem vektoru w .
 $b' - b \notin V \vee V'$ (byly by různoběžné). Tedy $w \notin V \vee V'$ □

Příčka procházející bodem



Theorem

Mějme dvě mimoběžné přímky $B = b_0 + V$ a $B' = b'_0 + V'$ v trojrozměrném AP A se zaměřením U a bod $c_0 \in A$ ($c_0 \notin B$, $c_0 \notin B'$). Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- 1 Existuje příčka mimoběžek B a B' obsahující bod c_0 .
- 2 $c_0 \notin b_0 + V \vee V'$ a $c_0 \notin b'_0 + V \vee V'$

Důkaz.

Předpokládáme, že $c_0 \notin B$, $c_0 \notin B'$. Pokud c_0 leží na jedné z přímek, existuje nekonečně mnoho příček.

$\exists c \in B$ průsečík příčky s přímkou B . $c_0 - c$ je směrový vektor příčky.

Podle předchozí věty $c_0 - c \notin V \vee V'$. $c - b_0 \in V$.

$(c - b_0) + (c_0 - c) \notin V \vee V' \rightarrow (c_0 - b_0) \notin V \vee V' \rightarrow c_0 \notin b_0 + V \vee V'$ □