Orientace afinních prostorů

Geometrie pro informatiky

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Orientace bází

bodové báze AP A dim m: φ a ψ
matice přechodu: $M_{\varphi\psi}$
matice přechodu: $M_{\psi\varphi}$
platí: $det M_{\varphi\psi} \neq 0$

φ a ψ jsou souhlasně orientované pokud $det M_{\varphi\psi} > 0$

Souhlasně orientované báze

Theorem

Relace "býti souhlasně orientované" je ekvivalence na množině všech bodových bází AP A. Příslušný rozklad má pro $m = 0$ právě jednu třídu a pro $m > 0$ právě 2.

Důkaz.

Reflexivita: φ je souhlasně orientovaná sama se sebou. $M_{\varphi\varphi}$ jednotková matice. $det M_{\varphi\varphi} = 1$.
Symetrie: $det M_{\psi\varphi} = \frac{1}{det M_{\varphi\psi}}$. Pokud $det M_{\varphi\psi} > 0$, pak $det M_{\psi\varphi} > 0$.
Tranzitivita: Předpoklad $det M_{\varphi\psi} > 0$ a $det M_{\psi\chi} > 0$.
$det M_{\varphi\psi} M_{\psi\chi} = det M_{\varphi\psi} \cdot det M_{\psi\chi}$ □

Souhlasně orientované báze

Důkaz.

Počet tříd:
$m = 0$: Existuje právě 1 bodová báze $\rightarrow$ 1 třída.
$m > 0$: pro 2 báze φ a ψ AP A, které nejsou souhlasně orientované platí $det M_{\psi\varphi} < 0$.
Pro libovolnou bázi χ platí $M_{\chi\varphi} = M_{\chi\psi} \cdot M_{\psi\varphi}$, takže
$det M_{\chi\varphi} = det M_{\chi\psi} \cdot det M_{\psi\varphi}$
$det M_{\psi\varphi} < 0$, tedy $det M_{\chi\varphi}$ a $det M_{\chi\psi}$ mají opačná znaménka.
χ je tedy souhlasně orientovaná buď s φ nebo ψ
□

Třídy orientace

- **Orientace AP**: třídy ekvivalence
- **Opačné orientace**
- Každá bodová báze určuje orientaci
- **Orientovaný AP**: AP se zadanou orientací
- **Kladně orientované báze**: báze se shodnou orientací
- **Záporně orientované báze**

Orientace

Theorem

Afinní báze $\varphi = (\alpha, a_0)$ a $\varphi' = (\alpha', a'_0)$ AP A určují tutéž orientaci právě tehdy, když $det M_{\alpha\alpha'} > 0$.

Orientace afinních bází

- **Kladně orientovaná afinní báze**
- **Záporně orientovaná afinní báze**
- **Kladně orientovaná vektorová báze**
- **Záporně orientovaná vektorová báze**
- **Standardní orientace**: orientace kanonické AB

Orientace na podmnožinách

B nadrovina AP A. AP je orientovaný.

- **vnější bod**
- **vnější vektor**

Orientace na podmnožinách

Theorem

Mějme nadrovinu B orientovaného AP A dimenze m a bod $a \notin B$. Mějme 2 bodové báze $\varphi = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$, $\varphi' = (a'_0, a'_1, \dots, a'_{m-1})$ nadroviny B.
Tyto dvě báze jsou souhlasně orientované, právě když jsou souhlasně orientované bodové báze $\psi = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a)$, $\psi' = (a'_0, a'_1, \dots, a'_{m-1}, a)$ AP A.

Důkaz.

$$M_{\psi'\psi} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M_{\varphi'\varphi} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$ $\square$

Orientace nadroviny B vnějším bodem a

Orientace na podmnožinách

Orientace nadroviny B vnějším vektorem v

Theorem

Mějme nadrovinu B se zaměřením V orientovaného AP A se zaměřením U a vektor $u \in U \setminus V$. Mějme 2 vektorové báze $\varphi = (v_1, \dots, v_{m-1})$, $\varphi' = (v'_1, \dots, v'_{m-1})$ zaměření V.
Tyto dvě báze jsou souhlasně orientované, právě když jsou souhlasně orientované vektorové báze $\psi = (v_1, \dots, v_{m-1}, u)$, $\psi' = (v'_1, \dots, v'_{m-1}, u)$ zaměření U.

Orientované konvexní množiny

AP A
$K \subset A$ **konvexní množina** dimenze k.
Orientace množiny K
Orientovaná konvexní množina

Orientované afinní zobrazení

Je-li afinní transformace $f : A \to A$ bijektivní, pak pro každou bodovou bázi $(a_0, \dots, a_m)$ AP A platí, že $(f(a_0), \dots, f(a_m))$ je rovněž bodová báze. Afinní transformace je **orientovaná**, jsou-li tyto dvě bodové báze souhlasně orientované.