Svazy

Algebra 2

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Palacký University, Olomouc

Kvaziuspořádání

Známé pojmy:

- Relace
- Vlastnosti relace:
  - reflexivní
  - symetrická
  - tranzitivní
  - antisymetrická

Definice

Binární relace $R \subseteq X \times X$, která je reflexivní a tranzitivní, je **kvaziuspořádání**.

Kvaziuspořádání

Definice

Kvaziuspořádání $R \subseteq X \times X$*, které je*
antisymetrické je **částečné uspořádání** *(též jen* **uspořádání***) na* X*,*
symetrické je **ekvivalence** *na* X*.*

Definice

Dvojice $\langle X \leq \rangle$*, kde* X *je množina a* $\leq$ *je uspořádání na* X*, je* **částečně uspořádaná množina***, neboli* **poset***.*

Odteď vždy $\leq$ budeme brát jako uspořádání.
$\leq^{-1}$ budeme značit $\geq$.
$x < y$ znamená $x \leq y$ a $x \neq y$.

Kvaziuspořádání

Příklad 150

Rozhodněte, zda následující dvojice jsou uspořádané množiny:

1. $\mathbb{N}$ *s klasickým porovnáním čísel* $\leq$
2. $\mathbb{Z}$ *s klasickým porovnáním čísel* $\leq$
3. $\mathbb{N}$ *s relací dělitelnosti*
4. $\mathbb{Z}$ *s relací dělitelnosti*
5. 2^M *s relací inkluze* $\subseteq$ *(*M *je neprázdná množina)*
6. $\langle F, \leq \rangle$. F *množina reálných funkcí jedné proměnné na intervalu* (a, b), $f \leq g$ *právě, když* $\forall x \in (a, b)$, $f(x) \leq g(x)$

Kvaziuspořádání

Příklad

Rozhodněte, zda následující dvojice jsou uspořádané množiny.

1. $\mathbb{N}$ s klasickým porovnáním čísel $\leq$, **ANO**
2. $\mathbb{Z}$ s klasickým porovnáním čísel $\leq$, **ANO** (stejně tak $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
3. $\mathbb{N}$ s relací dělitelnosti, **ANO**
4. $\mathbb{Z}$ s relací dělitelnosti, **NE**
   3 dělí -3, -3 dělí 3 ale $3 \neq -3$
5. 2^M s relací inkluze $\subseteq$ (M je neprázdná množina), **ANO**
6. $\langle F, \leq \rangle$. F množina reálných funkcí jedné proměnné na intervalu (a, b), $f \leq g$ právě, když $\forall x \in (a, b)$, $f(x) \leq g(x)$, **ANO**

Uspořádání

Definice

Pokud platí $x \leq y$ nebo $y \leq x$, nazýváme x, y **porovnatelné**.
Jinak je nazýváme **neporovnatelné** *a zapisujeme $x || y$.*

Definice

Pokud jsou každé dva prvky v posetu porovnatelné, nazýváme ho **řetězec**.
Pokud jsou každé dva prvky v posetu neporovnatelné, nazýváme ho **antiřetězec**.

Příklad 151

Rozhodněte, zda jsou uspořádané množiny řetězce:

1. $\mathbb{N}$ *s klasickým porovnáním čísel* $\leq$
2. $\mathbb{N}$ *s relací dělitelnosti*
3. 2^M *s relací inkluze* $\subseteq$ *(M je neprázdná množina)*
4. $\langle F, \leq \rangle$ *(z předchozího příkladu)*

Uspořádání

Příklad

Rozhodněte, zda jsou uspořádané množiny řetězce.

1. $\mathbb{N}$ s klasickým porovnáním čísel $\leq$, **ANO** (stejně tak $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
2. $\mathbb{N}$ s relací dělitelnosti, **NE**
3. 2^M s relací inkluze $\subseteq$ (M je neprázdná množina), **ANO** pokud je jednoprvková, jinak **NE**
4. $\langle F, \leq \rangle$ (z předchozího příkladu), **NE**

Kvaziuspořádání

Věta 84

Nechť Q je kvaziuspořádání na $X \neq \emptyset$. Pak $E = Q \cap Q^{-1}$ je ekvivalence na X a faktorová množina X/E je uspořádaná vzhledem k relaci $\leq_Q$ definované
$B \leq_Q C$, právě když $\forall b \in B$, $\forall c \in C$, $\langle b, c\rangle \in Q$,
pro všechna $B, C \in X/E$.

Důkaz

Reflexivita: Jelikož Q je reflexivní, je i Q^{-1} reflexivní, tj. také $E = Q \cap Q^{-1}$ reflexivní.

Symetrie: Nechť $\langle x, y\rangle \in E$ pak
$\langle x, y\rangle \in Q$ implikuje $\langle y, x\rangle \in Q^{-1}$, $\langle x, y\rangle \in Q^{-1}$ implikuje $\langle y, x\rangle \in (Q^{-1})^{-1} = Q$
Tedy $\langle y, x\rangle \in Q \cap Q^{-1} = E$, E je symetrická.

Tranzitivita: Nechť $\langle x, y\rangle \in E$ a $\langle y, z\rangle \in E$, pak
$\langle x, y\rangle \in Q$ a $\langle y, z\rangle \in Q$ a tedy $\langle x, z\rangle \in Q$, protože Q je tranzitivní.
$\langle x, y\rangle \in Q^{-1}$ a $\langle y, z\rangle \in Q^{-1}$, takže $\langle y, x\rangle \in Q$ a $\langle z, y\rangle \in Q$ a tedy $\langle z, x\rangle \in Q$ (Q je tranzitivní). Z toho máme, že $\langle x, z\rangle \in Q^{-1}$.
A tedy $\langle x, z\rangle \in Q \cap Q^{-1} = E$, E je tranzitivní.

Kvaziuspořádání

Důkaz (Pokračování)

$\langle X/E, \leq_Q \rangle$ je uspořádaná množina

Nechť $B \in X/E$. Pak pro všechna $b_1, b_2 \in B$ platí $\langle b_1, b_2 \rangle \in Q$ a odtud $B \leq_Q B$, tedy $\leq_Q$ je reflexivní.
Nechť $B, C \in X/E$ a platí $B \leq_Q C$, $C \leq_Q B$. Pak $\forall b \in B$, $\forall c \in C$ platí $\langle b, c \rangle \in Q$ a $\langle c, b \rangle \in Q$, tedy b, c padnou do téže třídy rozkladu, to je však možné jen pokud $B = C$, protože jsou třídy vzájemně disjunktní. (antisymetrie)
Tranzitivita $\leq_Q$ plyne přímo z tranzitivity relace Q.
$\leq_Q$ je skutečně uspořádání.

Isomorfismus

Definice

Dvě uspořádané množiny $\langle A, \leq_A \rangle$ *a* $\langle B, \leq_B \rangle$ *nazveme* **isomorfní**, *pokud existuje bijekce* $f : A \to B$ *s vlastnostmi:*

$x \leq_A y$ *implikuje* $f(x) \leq_B f(y)$, *pro všechna* $x, y \in A$

$c \leq_B d$ *implikuje* $f^{-1}(c) \leq_A f^{-1}(d)$, *pro všechna* $c, d \in B$.

f *se nazývá* **isomorfismus uspořádaných množin** $\langle A, \leq_A \rangle$ *a* $\langle B, \leq_B \rangle$.

Isomorfismus

Věta 85

Každá uspořádaná množina $\langle M, \leq \rangle$ *je isomorfní některé podmnožině uspořádané množiny* $\langle 2^M, \subseteq \rangle$.

To, že $\langle 2^M, \subseteq \rangle$ je uspořádaná množina už jsme si ukázali.

Důkaz

Nechť $f : M \to 2^M$ *je zobrazení dané předpisem* $f(a) = \{x \in M | x \leq a\}$.
Pro $a, b \in M$ *takové, že* $a \leq b$ *zjevně máme*
$f(a) = \{x \in M | x \leq a\} \subseteq \{x \in M | x \leq b\} = f(b)$.
Obráceně pro $C, D \in f[M]$ *a* $C \subseteq D$, *pak* $\exists a, b \in M$ *tak, že* $C = \{x \in M | x \leq a\}$ *a* $D = \{x \in M | x \leq b\}$ *a z* $C \subseteq D$ *plyne* $a \leq b$. *Ale* $a = f^{-1}(C)$, $b = f^{-1}(D)$ *tedy* $C \subseteq D$ *implikuje* $f^{-1}(C) \leq f^{-1}(D)$.
Je-li $C = D$, *pak pro* $a, b \in M$ *splňující* $f(a) = C$, $f(b) = D$ *zjevně platí* $a = b$, *tudíž* f *je injektivní. Takže* f *je bijekce* M *na* $f[M]$, *tj.* $f(M)$ *a* $\langle f[M], \subseteq \rangle$ *jsou isomorfní, přičemž* $f[M] \subseteq 2^M$.

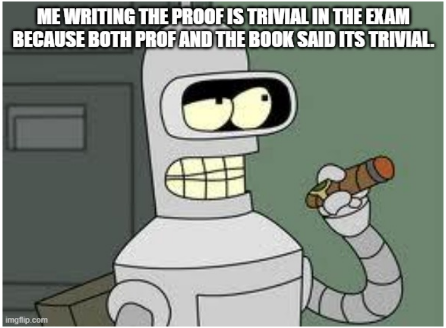
Princip duality

Věta 86 (Princip duality)

Nechť $\leq$ *je uspořádání na* X. *Pak* $\geq$ $(\leq^{-1})$ *je opět uspořádání na* X.

Důkaz

Vlastnosti $\geq$ *vyplynou přímo z vlastností* $\leq$.



Diagramy

Definice

Nechť $x, y \in A$, $x < y$. *Řekneme, že prvek* y **kryje** *prvek* x, *neboli* x *je* **pokrýván** *prvkem* y, *pokud pro každé* $z \in A$ *splňující* $x \leq z \leq y$ *platí* $x = z$ *nebo* $z = y$.
Zapisujeme $x \prec y$.
Relace $\prec$ *se nazývá relace* **pokrytí**.

Diagramy

Lemma 5

Nechť $\langle A, \leq \rangle$ je konečná uspořádaná množina a $x, y \in A$. Platí $x < y$, právě když existují prvky $z_0 = x, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = y$ v A takové, že $z_i \prec z_{i+1}$, pro všechna $a = 0, \ldots, n-1$.

Důkaz

$\underline{\Rightarrow}$:
Nechť $x < y$. Pak buď $x \prec y$ (v tom případě položme $n = 1$, $z_0 = x$, $z_1 = y$), nebo existuje $a \in A$ tak, že $x < a < y$, pak položme $n = 2$, $z_0 = x$, $z_1 = a$, $z_2 = y$. Jestliže neplatí $x \prec a$, pak existuje $b \in A$ tak, že $x < b < a$.
Takto opakujeme dále.

Protože A je konečná, musíme po konečném počtu kroků dojít k prvkům, které se pokrývají, stejně tak pro prvky $a < y$. Tedy po konečném počtu opakování výše uvedeného kroku dostaneme existenci $z_0 = x, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = y$ splňující tvrzení věty.

$\underline{\Leftarrow}$:
Nechť $z_0 = x \prec z_1 \prec \cdots \prec z_{n-1} \prec z_n = y$. Pak $z_0 = x < z_1 < \cdots < z_{n-1} < z_n = y$ a tedy také $z_0 = x \leq z_1 \leq \cdots \leq z_{n-1} \leq z_n = y$. Z tranzitivity plyne $x \leq y$.

Diagramy

Definice (**Hasseův diagram**)

Diagram uspořádané množiny $\langle A, \leq \rangle$ *je diagram orientovaného grafu, kde* A *je množina vrcholů a* $\prec$ *(relace pokrytí indukovaná* $\leq$*) je množina hran. Namísto šipek se pro hrany používá vertikální pozicování: pokud* $x \prec y$*, tak* x *je zakresleno níže než* y*.*

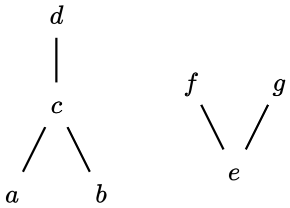
Příklad 152

Nechť $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ *a relace* $\leq$ *je na* A *dána takto:*
$a < c$, $b < c$, $c < d$, $a < d$, $b < d$, $e < f$, $e < g$.
Jak vypadá Hasseův diagram této uspořádané množiny?

Diagramy

Příklad

Nechť $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ *a relace* $\leq$ *je na* A *dána takto:*
$a < c$, $b < c$, $c < d$, $a < d$, $b < d$, $e < f$, $e < g$.
Jak vypadá Hasseův diagram této uspořádané množiny?



Příklad 153

Jak vypadá Hasseův diagram řetězce, antiřetězce?
Máme-li diagram uspořádané množiny $\langle A, \leq \rangle$, *jak bude vypadat diagram* $\langle A, \geq \rangle$?

Diagramy

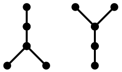
Příklad

Jak vypadá Hasseův diagram řetězce, antiřetězce?
Máme-li diagram uspořádané množiny $\langle A, \leq \rangle$, jak bude vypadat diagram $\langle A, \geq \rangle$?

- Řetězec:

- Antiřetězec:

- Máme-li diagram uspořádané množiny $\langle A, \leq \rangle$. Diagram $\langle A, \geq \rangle$ dostaneme převrácením $\langle A, \leq \rangle$ „vzhůru nohama“.



Prvky množiny

Definice

Nechť $\langle A, \leq \rangle$ *je uspořádaná množina. Prvek* $a \in B \subseteq A$ *se nazývá:*
Minimální *v* B*, pokud* $x \leq a$ *implikuje* $x = a$ *pro všechna* $x \in B$*.*
Maximální *v* B*, pokud* $a \leq x$ *implikuje* $x = a$ *pro všechna* $x \in B$*.*
Nejmenší *v* B*, pokud pro všechna* $x \in B$ *platí* $a \leq x$*.*
Největší *v* B*, pokud pro všechna* $x \in B$ *platí* $x \leq a$*.*

Případně jen minimální, maximální, nejmenší, největší, pokud $B = A$.

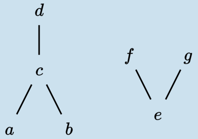
Je zřejmé, že má-li uspořádaná množina největší prvek, pak je jediný (stejně tak nejmenší prvek).
Je zřejmé, že má-li uspořádaná množina největší prvek, je také maximální a jiné maximální prvky v A neexistují. Analogicky pro nejmenší a minimální.

Prvky množiny

Příklad 154

Jaké prvky jsou nejmenší, největší, minimální a maximální v následujících uspořádaných množinách:

1. *Libovolný konečný řetězec*
2. *Libovolný antiřetězec*
3. $\langle A, \leq \rangle$ *z příkladu 152*

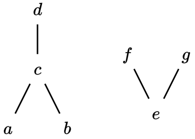


Prvky množiny

Příklad

Jaké prvky jsou nejmenší, největší, minimální a maximální v následujících uspořádaných množinách?

1. Libovolný konečný řetězec:
   Má největší i nejmenší prvek.
2. Libovolný antiřetězec:
   Nemá nejmenší ani největší prvek (pokud není jednoprvkový). Všechny prvky jsou minimální i maximální.
3. $\langle A, \leq \rangle$ z příkladu 152



Nemá ani nejmenší ani největší prvky. d, f, g jsou maximální, a, b, e jsou minimální.

Prvky množiny

Definice

Nechť $\langle A, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a $M \subseteq A$. Označme symbolem
$U(M) = \{x \in A | y \leq x$ *pro každé* $y \in M\}$
$L(M) = \{x \in A | x \leq y$ *pro každé* $y \in M\}$

Množina $U(M)$ se nazývá **horní kužel** *množiny M. Její prvky se nazývají* **horní hranice** *množiny M.*
Má-li $U(M)$ nejmenší prvek, nazývá se **supremum** *a značí se $sup(M)$.*

Množina $L(M)$ se nazývá **dolní kužel** *množiny M. Její prvky se nazývají* **dolní hranice** *množiny M.*
Má-li $L(M)$ největší prvek, nazývá se **infimum** *a značí se $inf(M)$.*

Zjevně pro každou $M \subseteq A$ supremum (infimum) buď neexistuje, nebo je jen jedno.
Pro $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ píšeme $sup(a_1, \ldots, a_n)$ místo $sup(\{a_1, \ldots, a_n)\}$ (analogicky pro inf).

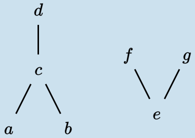
Prvky množiny

Příklad 155

Pro $a, b \in M$, $a \leq b$, *jak vypadá* $sup(a,b)$ *a* $inf(a,b)$*?*

Příklad 156

Jak hledáme sup *a* inf *prvků, které jsou nesrovnatelné?*
Např. pro $\langle A, \leq \rangle$ *z příkladu 152*



jak vypadá $sup(a,b)$, $inf(f,g)$ *a* $sup(c,f)$*?*

Prvky množiny

Příklad

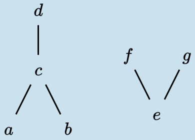
Pro $a, b \in M$, $a \leq b$, *jak vypadá* $sup(a,b)$ *a* $inf(a,b)$*?*

- $sup(a,b) = b$
- $inf(a,b) = a$

Prvky množiny

Příklad

Jak hledáme sup *a* inf *prvků, které jsou nesrovnatelné?*
Např. pro $\langle A, \leq \rangle$ *z příkladu 152*



jak vypadá $sup(a, b)$, $inf(f, g)$ *a* $sup(c, f)$*?*

- $sup(a, b) = c$
- $inf(f, g) = e$
- $sup(c, f)$ neexistuje

Polosvazy

Definice

Abelovská idempotentní pologrupa, tj. grupoid $\langle G, \circ \rangle$*, kde pro každé* $a, b, c \in G$ *platí*
asociativita $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
komutativita $a \circ b = b \circ a$
idempotence $a \circ a = a$
je **polosvaz***.*

Polosvazy

Věta 87

Nechť $\langle G, \circ \rangle$ *je polosvaz. Relace* $\leq$ *na* G *definovaná předpisem*
$a \leq b$*, právě když* $a \circ b = b$
je uspořádání. Navíc v uspořádané množině $\langle G, \leq \rangle$ *existuje pro každé* $a, b \in G$ *supremum a platí* $sup(a, b) = a \circ b$*.*

Důkaz

Z idempotence ihned plyne $a \leq a$ *pro každé* $a \in G$*, tedy* $\leq$ *je reflexivní.*
Je-li $a \leq b$*,* $b \leq c$ *pro* $a, b, c \in G$*, pak* $a \circ b = b$*,* $b \circ c = c$*, tedy z asociativity dostáváme:*
$a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$*, tedy* $a \leq c$*. Tj.* $\leq$ *je tranzitivní.*
Nechť $a \leq b$ *a* $b \leq a$*. Z komutativity dostáváme* $b = a \circ b = b \circ a = a$ *tedy* $\leq$ *je antisymetrická, tj.* $\leq$ *je uspořádání v* G*.*

Polosvazy

Důkaz (Pokračování)

Z asociativity, komutativity a idempotence platí
$a \circ (a \circ b) = a \circ b$, $b \circ (a \circ b) = a \circ b$ *a tedy* $a \leq a \circ b$, $b \leq a \circ b$, *tj.* $a \circ b \in U(a,b)$.

Nechť $c \in U(a,b)$, *pak* $a \leq c$, $b \leq c$, *tedy* $a \circ c = c$, $b \circ c = c$. *Takže*
$(a \circ b) \circ c = (a \circ b) \circ (c \circ c) = (a \circ c) \circ (b \circ c) = c \circ c = c$.
To znamená, že $a \circ b \leq c$. *Takže* $a \circ b$ *je nejmenší prvek v* $U(a,b)$, *tj.* $a \circ b = sup(a,b)$.

Polosvazy

Věta 88

Nechť $\langle G, \leq \rangle$ *je uspořádaná množina a pro každé* $a, b \in G$ *existuje* $sup(a, b)$.
Označme $a \circ b = sup(a, b)$, *pak* $\langle G, \circ \rangle$ *je polosvaz.*

Důkaz

Jelikož

$sup(a, a) = a$

$sup(a, b) = sup(b, a)$

$sup(a, sup(b, c)) = sup(a, b, c) = sup(sup(a, b), c)$

je ihned zřejmé, že operace $\circ$ *je idempotentní, komutativní a asociativní.*

Polosvazy

Tvrzení

Zaměníme-li $\leq$ za $\geq$, pak dle principu duality, supremum v uspořádání $\geq$ je infimem v $\leq$.

Definujeme-li v polosvazu uspořádání předpisem
$a \leq b$ *právě, když* $a \circ b = a$,
pak pro každé $a, b \in G$ *existuje* $inf(a, b)$ *a platí* $inf(a, b) = a \circ b$ *(věta 87).*
Obráceně, je-li $\langle G, \leq \rangle$ *uspořádaná množina, kde pro každé* $a, b \in G$ *existuje* $inf(a, b)$*, pak* $\langle G, \circ \rangle$*, kde* $a \circ b = inf(a, b)$ *je polosvaz. (věta 88)*

Polosvazy

Příklad 157

Nechť $M \neq \emptyset$, *pak v* $\langle 2^M, \subseteq \rangle$ *existuje pro každé* A, B *supremum a platí* $sup(A, B) = A \bigcup B$.
Tedy $\langle 2^M, \bigcup \rangle$ *je polosvaz.*

Příklad 158

Nechť $M \neq \emptyset$, *pak v* $\langle 2^M, \subseteq \rangle$ *existuje pro každé* A, B *infimum a platí* $inf(A, B) = A \bigcap B$.
Tedy $\langle 2^M, \bigcap \rangle$ *je polosvaz.*

Příklad 159

Existují v $\mathbb{N}$ *s relací dělitelnosti suprema a infima pro všechna čísla* $a, b \in \mathbb{N}$*?*

Polosvazy

Příklad

Existují v $\mathbb{N}$ s relací dělitelnosti suprema a infima pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$?

- $sup(a, b) = lcm(a, b)$
- $inf(a, b) = gcd(a, b)$
- $\langle \mathbb{N}, sup \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, inf \rangle$ jsou polosvazy

Příklad 160

Vymyslete další příklad polosvazu.

Polosvazy

Věta 89

Nechť $\langle G, \circ \rangle$ *je polosvaz a* $\langle H, \circ \rangle$ *je podgrupoid grupoidu* $\langle G, \circ \rangle$, *pak* $\langle H, \circ \rangle$ *je polosvaz, tzn.* **podpolosvaz** *polosvazu* $\langle G, \circ \rangle$.

Důkaz

Zřejmé. **Opravdu?**

Svazy

Definice

Nechť L je neprázdná množina, nechť $\vee$ a $\wedge$ jsou dvě binární operace na L takové, že $\langle L, \vee \rangle$ a $\langle L, \wedge \rangle$ jsou polosvazy a platí **zákony absporpce***:*
$a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$
pro každé $a, b \in L$. Pak $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ je **svaz***.*
Operaci $\vee$ nazýváme **spojení***, $\wedge$* **průsek***.*

Svaz je množina se dvěma operacemi, které jsou asociativní, komutativní, idempotentní a splňují zákony absorpce.

Lemma 6

Nechť $L \neq \emptyset$ je množina se dvěma binárními operacemi ($\vee$ a $\wedge$), které jsou asociativní, komutativní a splňují zákony absorpce. Pak $\vee$ a $\wedge$ jsou idempotentní. Tj. $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ je svaz.

Důkaz

Nechť $a, b \in L$.
Označme $a \wedge b = c$.
Dle absorpce dostaneme $a = a \vee (a \wedge b)$, tedy
$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a \wedge (a \vee c) = a.$
Tedy $\wedge$ je idempotentní.
Duálně pro operaci $\vee$.

Svazy

Věta 90

Nechť $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *je svaz. Definujme relaci* $\leq$ *na* L *takto*
$a \leq b$*, právě když* $a \vee b = b$.
Pak platí:

1. $\leq$ *je uspořádání na* L *(***indukované uspořádání***)*
2. $a \vee b = sup(a, b)$
3. $a \leq b$*, právě když* $a \wedge b = a$
4. $a \wedge b = inf(a, b)$

Důkaz

(1) a (2): plynou přímo z věty 87

(3): Nechť $a \leq b$*. Tato relace je ekvivalentní s* $a \vee b = b$*, což dle absorpce dává*
$a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$.

(4): Plyne z duality.

Svazy

Věta 91

Nechť $\langle L, \leq \rangle$ *je poset, kde pro každé* $a, b \in L$ *existuje* $sup(a, b)$ *a* $inf(a, b)$. *Označme* $sup(a, b) = a \vee b$, $inf(a, b) = a \wedge b$. *Pak* $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ *je svaz.*

Důkaz

Z věty 88 plyne, že stačí dokázat zákony absorpce pro $\wedge$ *a* $\vee$.
Protože $a \wedge b = inf(a, b) \leq a \leq sup(a, b) = a \vee b$, *pak zjevně*
$a \vee (a \wedge b) = sup(a, inf(a, b)) = a$
$a \wedge (a \vee b) = inf(a, sup(a, b)) = a$

Příklad 161

Každý řetězec je svaz.
Zřejmě $a \wedge b = max(a,b)$, $a \vee b = min(a,b)$.

Příklad 162

Pro $M \neq \emptyset$ *je* $\langle 2^M, \cup, \cap \rangle$ *svaz.*

Příklad 163

$\langle \mathbb{N}, lcm, gcd \rangle$ *je svaz.*

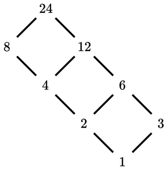
Příklad 164

Nechť $n \in \mathbb{N}$ *a* $P(n)$ *je množina všech dělitelů čísla* n. *Pak* $\langle P(n), lcm, gcd \rangle$ *je svaz. Jak by vypadaly diagramy pro* $n = 24$ *a* $n = 30$*?*

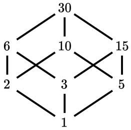
Příklad

Nechť $n \in \mathbb{N}$ *a* $P(n)$ *je množina všech dělitelů čísla* n. *Pak* $\langle P(n), lcm, gcd \rangle$ *svaz. Jak by vypadaly diagramy pro* $n = 24$ *a* $n = 30$*?*

- $n = 24$



- $n = 30$



Svazy

Příklad 165

Nechť $\langle G, \cdot \rangle$ *je grupa. Pak množina všech normálních podgrup tvoří svaz, přičemž* $A \wedge B = A \bigcap B$ *a* $A \vee B = A \cdot B$*, kde* A, B *jsou normální podgrupy.*

Příklad 166

Nechť $\langle R, +, \cdot \rangle$ *je okruh. Množina* $\mathcal{I}$ *všech ideálů okruhu* R *je svaz, kde pro* $A, B \in \mathcal{I}$ *je* $A \wedge B = A \bigcap B$ *a* $A \vee B$ *je ideál generovaný množinou* $A \bigcup B$*.*

Tvrzení

Princip duality se ve svazech uplatní tímto způsobem:
Nahradíme-li konzistentně v platném tvrzení o svazu symbol $\wedge$ symbolem $\vee$ a naopak, symbol $\leq$ symbolem $\geq$ a naopak, dostaneme opět platné tvrzení. Tzn. **duální tvrzení**.
V důkazech stačí dokazovat jen jedno tvrzení – duální z něj získáme dle principu duality.

Svazy

Definice

Nechť $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *je svaz, nechť* $\emptyset \neq A \subseteq L$. A *je* **podsvaz** *svazu* $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, *pokud* $\forall a, b \in A$ *platí* $a \vee b \in A$ *a* $a \wedge b \in A$.

Definice

Nechť $\langle A, \leq \rangle$ *je uspořádaná množina,* $a, b \in A$ *a* $a \leq b$. *Množina* $[a, b] = \{x \in A | a \leq x \leq b\}$ *je* **interval** *v* A.

Definice

Nechť $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *je svaz a* $\leq$ *je indukované uspořádání.*
Má-li $\langle A, \leq \rangle$ *nejmenší prvek, nazýváme ho* **nula svazu** *a značíme* 0.
Má-li $\langle A, \leq \rangle$ *největší prvek, nazýváme ho* **jednička svazu** *a značíme* 1.

Věta 92

Nechť $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *je svaz,* A_i*, pro* $i \in I$*, jsou jeho podsvazy.*
Je-li $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$*, pak* $\bigcap_{i \in I} A_i$ *je podsvaz svazu* $\langle L, \wedge, \vee \rangle$*.*

Důkaz

Nechť $\bigcap_{i \in I} A_i = A \neq \emptyset$ *a* $a, b \in A_i$*, pro všechna* $i \in I$*, ale* A_i *je podsvaz, takže i* $a \vee b \in A_i$ *a* $a \wedge b \in A_i$ *pro všechna* $i \in I$*, tedy* $a \vee b \in A$ *a* $a \wedge b \in A$*, tj.* A *je podsvaz.*

Svazy

Věta 93

Nechť $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *je svaz, pak platí:*

1. *pro každý prvek* $a \in L$ *je* $\{a\}$ *podsvaz svazu* $\langle L, \wedge, \vee \rangle$
2. *každý interval svazu* $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *je jeho podsvaz*
3. *pokud* L *má* 0 *a* 1, *pak* $L = [0, 1]$

Důkaz

(2): Nechť $\le$ je indukované uspořádání, $a, b \in L$ a platí $a \le b$.
Nechť $x, y \in [a, b]$. Pak $a \le x \le b$, $a \le y \le b$ a tedy také
$a \le inf(x, y) \le sup(x, y) \le b$.
Tj. $x \wedge y \in [a, b]$, $x \vee y \in [a, b]$, tedy $[a, b]$ je podsvaz svazu $\langle L, \wedge, \vee \rangle$.

(1): Jelikož $a \le a$ pro každé $a \in L$, je $\{a\} = [a, a]$ a tedy je to podsvaz dle (2).

(3): Má-li L prvky 0 a 1, pak vzhledem k indukovanému uspořádání máme $0 \le x \le 1$ pro každé $x \in L$, tj. $L = [0, 1]$.

Věta 94

Má-li svaz $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *prvek* 0, *pak pro každé* $x \in L$ *platí* $x \wedge 0 = 0$, $x \vee 0 = x$.

Má-li svaz $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *prvek* 1, *pak pro každé* $x \in L$ *platí* $x \wedge 1 = x$, $x \vee 1 = 1$.

Důkaz

Zjevné.

Svazy

Věta 95

Nechť $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *je konečný svaz. Pak* L *má* 0 *i* 1.

Důkaz

Je-li L *konečná množina, tj.* $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, *položme*
$a = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$,
$b = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$.
Zjevně $a \leq a_i \leq b$ *pro každý prvek* $a_i \in L$.
A tedy a *je nula a* b *je jednička svazu.*

Svazy

Věta 96

Nechť $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *je svaz a* $\leq$ *je indukované uspořádání. Pak pro libovolné prvky* $a, b, c, d \in L$ *platí*

1. $a \wedge b \leq a \leq a \vee b$
2. *pokud* $a \leq b$, $c \leq d$, *tak*
   $a \wedge c \leq b \wedge d$, $a \vee c \leq b \vee d$

Důkaz

(1): Plyne přímo z $inf(a, b) \leq sup(a, b)$

(2): pokud $a \leq b$, $c \leq d$, *tak* $a \wedge b = a$ *a* $c \wedge d = c$. *Tedy*
$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = (a \wedge cb) \wedge (b \wedge d)$.
Odtud $a \wedge c \leq b \wedge d$. *Druhá nerovnost je duální.*

Homomorfismus

Definice

Nechť $\langle A, \wedge_A, \vee_A \rangle$ *a* $\langle B, \wedge_B, \vee_B \rangle$ *jsou svazy. Zobrazení* $h : A \to B$ *je* **homomorfismus**, *pokud pro každé* $a, b \in A$ *platí*
$h(a \wedge_A b) = h(a) \wedge_B h(b)$, $h(a \vee_A b) = h(a) \vee_B h(b)$.

Bijektivní homomorfismus je **isomorfismus**.

Definice

Nechť $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ *je svaz.*
Ekvivalence θ *na* L *je* **kongruence** *svazu* $\langle L, \wedge, \vee \rangle$, *pokud pro každé* $a, b, c, d \in L$ *platí*
pokud $\langle a, b \rangle \in \theta$ *a* $\langle c, d \rangle \in \theta$, *tak* $\langle a \wedge c, b \wedge d \rangle \in \theta$ *a* $\langle a \vee c, b \vee d \rangle \in \theta$

Homomorfismus

Věta 97

Nechť A, B, C *jsou svazy,* $h : A \to B$ *a* $g : B \to C$ *jsou homomorfismy (isomorfismy)* $g \circ h$ *je homomorfismus (isomorfismus)* $A \to C$.

Důkaz

Nechť $a, b \in A$, *pak*

$(g \circ h)(a \wedge b) = g(h(a \wedge b)) = g(h(a) \wedge h(b)) = g(h(a)) \wedge g(h(b)) = (g \circ h)(a) \wedge (g \circ h)(b).$

Duálně platí i pro $\vee$. *A tedy složení homomorfismů je homomorfismus.*

Protože složení dvou bijekcí je bijekce, je složení dvou isomorfismů isomorfismus.

Homomorfismus

Věta 98

Je-li $f : A \to B$ *isomorfismus, je i* f^{-1} *isomorfismus.*

Důkaz

Je-li $f : A \to B$ *isomorfismus,* $x, y \in B$ *pak, protože* f *je surjektivní existují* $a, b \in A$ *tak, že* $f(a) = x$, $f(b) = y$.
Pak $f^{-1}(x \vee y) = f^{-1}(f(a)) \vee f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(f(a \vee b)) = a \vee b = f^{-1}(x) \vee f^{-1}(y)$.
Duálně pro operaci $\wedge$. *A tedy inverze isomorfismu je isomorfismus.*

Homomorfismus

Věta 99

Identické zobrazení $id(x) = x$ *je isomorfismus.*

Důkaz

Identita je zjevně bijekce a platí $id(x \vee y) = x \vee y = id(x) \vee id(y)$.
Duálně pro $\wedge$. *Je to tedy isomorfismus.*

Věta 100

Je-li $h : A \to B$ *homomorfismus a* $a, b \in A$. *Pak* $a \leq b$ *implikuje* $h(a) \leq h(b)$.

Důkaz

Nechť $a, b \in A$, $a \leq b$. *Pak* $a \wedge b = a$ *a pro homomorfismus* h *platí*
$h(a) = h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$, *tedy* $h(a) \leq h(b)$.

Homomorfismus

Věta 101

Nechť L je svaz a θ je kongruence na L. Pak faktorová množina L/θ je svazem vzhledem k operacím definovaným takto:
$B, C \in L/\theta$, pak $B \vee C = D$ a $B \wedge C = E$,
Pokud pro každé $b \in B$, $c \in C$ platí $b \vee c \in D$, $b \wedge c \in E$.

Důkaz

$\vee$, $\wedge$ jsou binární operace na L/θ:
Nechť $b \in B$, $c \in C$. Jelikož L/θ je množina všech tříd rozkladu L dle θ, existuje $E, D \in L/\theta$ takové, že $b \vee c \in D$, $b \wedge c \in E$. Nechť $b' \in B$, $c' \in C$. Pak $\langle b,' b\rangle \in \theta$, $\langle c,' c\rangle \in \theta$, tedy také
$\langle b \vee c,' b \vee c'\rangle \in \theta$ tedy $'b \vee c' \in D$
$\langle b \wedge c,' b \wedge c'\rangle \in \theta$ tedy $'b \wedge c' \in E$.
Protože třídy rozkladu jsou vzájemně disjunktní, jsou D a E určeny jednoznačně, tedy $\vee$, $\wedge$ jsou skutečně binární operace na L/θ.

Homomorfismus

Důkaz (Pokračování)

Asociativita:
Nechť $x \in (B \vee C) \vee D$ *pro nějaké* $B, C, D \in L/\theta$, *pak* $x = (b \vee c) \vee d$ *pro nějaké* $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$. *Pak* $x = b \vee (c \vee d)$, *protože* $\vee$ *je v* L *asociativní. Tedy* $x \in B \vee (C \vee D)$.
Dokázali jsme, že $(B \vee C) \vee D \subseteq B \vee (C \vee D)$.
Analogicky bychom dokázali i obrácenou inkluzi. Tedy operace $\vee$ *na* L/θ *je asociativní.*
Duálně asociativita platí i pro operaci $\wedge$.

Komutativita a absorpce by se dokazovala obdobně.

Homomorfismus

Věta 102 (Věta o homomorfismu svazů)

1. *Nechť A, B jsou svazy a $h : A \to B$ je surjektivní homomorfismus. Definujme relaci θ_h na A takto: $\langle a, b\rangle \in \theta_h$, právě když $h(a) = h(b)$. Pak θ_h je kongruence na A a $A/\theta_h \simeq B$.*
2. *Nechť θ je kongruence na svazu L. Pro $a \in L$ označme $[a]_\theta$ tu třídu L/θ, která obsahuje prvek a. Pak zobrazení $h_\theta : L \to L/\theta$ dané předpisem $h_\theta(a) = [a]_\theta$ je surjektivní homomorfismus svazu L na L/θ.*

Důkaz

(1): Nechť A, B jsou svazy a $h : A \to B$ je surjektivní homomorfismus.
Zjevně relace θ_h definovaná $\langle a, b\rangle \in \theta_h$, právě když $h(a) = h(b)$, je reflexivní, symetrická a tranzitivní, a tedy ekvivalence. Nechť $\langle a, b\rangle \in \theta_h$, $\langle c, d\rangle \in \theta_h$, pak $h(a) = h(b)$, $h(c) = h(d)$, tedy $h(a \vee c) = h(a) \vee h(c) = h(b) \vee h(d) = h(b \vee d)$, tj. $\langle a \vee c, b \vee d\rangle \in \theta_h$. Duálně se dokáže $\langle a \wedge c, b \wedge d\rangle \in \theta_h$. θ_h je kongruence na A.

Homomorfismus

Důkaz (Pokračování)

(1): *Dle předchozí věty je* A/θ_h *faktorový svaz. Zobrazení* $[a]_{\theta_h} \to h(a)$ *je* *injekce*: *protože* $h(a) = h(b) \Rightarrow \langle a, b \rangle \in \theta_h$, *tedy* $[a]_{\theta_h} = [b]_{\theta_h}$
surjekce: *protože* h *je surjekce*
homomorfismus: *protože* $[a]_{\theta_h} \vee [b]_{\theta_h} = [a \vee b]_{\theta_h} \to h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$
Duálně pro $\wedge$. *Tedy jedná se isomorfismus* $A/\theta \to B$.

(2): *Nechť* θ *je kongruence na svazu* L. *Dle předchozí věty je* L/θ *faktorový svaz.*
Definujme $h_\theta : L \to L/\theta$ *předpisem* $h_\theta(a) = [a]_\theta$.
Zřejmě h_θ *je surjekce. Dále pro* $a, b \in L$ *máme*
$h_\theta(a \vee b) = [a \vee b]_\theta = [a]_\theta \vee [b]_\theta = h_\theta(a) \vee h_\theta(b)$. *To plyne z vlastností kongruence a z definice operace na faktorovém svazu viz předchozí věta.*
Duálně se dokáže $h_\theta(a \wedge b) = h_\theta(a) \wedge h_\theta(b)$. *Tedy* h_θ *je surjektivní homomorfismus.*

Homomorfismus

Věta 103

Bijekce h *svazu* A *na svaz* B *je isomorfismus, právě když platí, že* $a \leq b$ *právě když* $h(a) \leq h(b)$.

Důkaz

Je-li h *isomorfismus, pak dle věty 100 jsou* h *i* h^{-1} *izotonní.*
Obráceně, nechť h *i* h^{-1} *jsou izotonní bijekce. Pak*
$h(a) \wedge h(b) = inf(h(a), h(b)) = h(inf(a,b)) = h(a \wedge b)$
Duálně pro $h(a) \vee h(b) = h(a \wedge b)$.