



Rekonstrukce obrazu

Pokročilá analýza obrazu

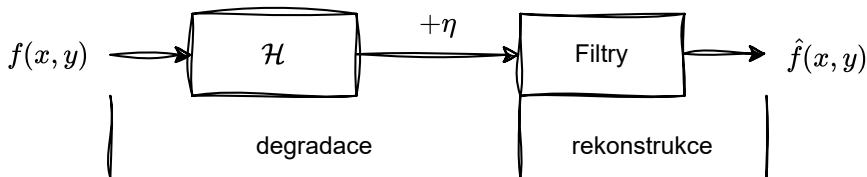
Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Obraz

- Image enhancement – subjektivní úpravy obrazů dle aplikace
 - Jasové transformace
 - Filtrování
- Image reconstruction – objektivní úpravy obrazu
 - Známe matematickou funkci degradace – inverzní proces
- Typy degradace a jak je odstranit

Matematický model

- **Degradace:** operátor \mathcal{H} (dané h) spolu s aditivním šumem η
 $g(x, y) = h \star f(x, y) + \eta(x, y)$
- Čím více máme informací o \mathcal{H} a η , tím lépe odhadneme původní obraz f
- Začneme degradací, kde je přítomen jen η , později i \mathcal{H}



Model šumu

- šum se objevuje při akvizici nebo přenosu
- typ šumu a jeho množství závisí na snímacím zařízení
- **Vlastnosti šumu**
 - je nebo není korelovaný s obrazem
 - je nebo není závislý na prostorových souřadnicích
- my se budeme věnovat aditivnímu šumu, který není korelovaný s obrazem

Probability density funkce

- Statistické vlastnosti šumu
- Šum je náhodná veličina, která se dá definovat pomocí PDF
- Šum (η) je obrázek, který je stejně velký jako původní
- $g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$
- **Nejznámější typy šumu:**
 - Gaussovský
 - Rayleighův
 - Erlangův (gamma)
 - Exponenciální
 - Uniformní
 - Sůl a pepř

Gaussovský šum

- **Gaussovský šum** je jeden z nejčastějších modelů šumu
- Typicky vzniká:
 - elektronickým šumem senzorů,
 - šumem při zesilování signálu.
- $\eta(x, y)$ je náhodná proměnná s gaussovským rozdělením
- **Statistické vlastnosti:**
 - střední hodnota: $\bar{n} = \mu$ (často $\mu = 0$),
 - rozptyl: $\text{Var}(n) = \sigma^2$,
 - PDF:

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

- ovlivňuje především **vysoké frekvence**.
- Běžně se potlačuje pomocí **LPF** (např. Gaussovský filtr).

Rayleighův šum

- **Rayleighův šum** se vyskytuje především v obrazových datech, kde je měřená hodnota výsledkem **amplitudy náhodného signálu**.
- Typické oblasti výskytu:
 - radarové a sonarové zobrazování,
 - některé typy lékařského zobrazování.
- **Statistický model:**
 - šum má Rayleighovo rozdělení,
 - střední hodnota: $\bar{n} = a + \sqrt{\pi b/4}$,
 - rozptyl: $\text{Var}(n) = \frac{b(4-\pi)}{4}$,
 - PDF:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{2}{b}(n-a)e^{-(n-a)^2/b}, & n \geq a, \\ 0, & n < a, \end{cases}$$

- **Vlastnosti:**
 - má pouze kladné hodnoty,
 - nesymetrické rozdělení,
- **Potlačení:**
 - logaritmická transformace (převod na aditivní model),
 - adaptivní filtrace (např. speckle filtry),
 - frekvenční i prostorové metody.

Erlangův (gamma) šum

- **Erlangův (gamma) šum** je model šumu s **kladnými hodnotami**, často používaný pro popis **akumulovaných náhodných procesů**.
- Vzniká jako součet několika nezávislých exponenciálně rozdělených veličin.
- Typické oblasti výskytu:
 - radarové a sonarové systémy,
 - lékařské zobrazování.

■ **Statistický model:**

- střední hodnota: $\bar{n} = \frac{k}{a}$,
- rozptyl: $\text{Var}(n) = \frac{k}{a^2}$.
- šum má Erlangovo (gamma) rozdělení,
- PDF:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{a^k n^{k-1}}{(k-1)!} e^{-an}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

kde k je tvarový parametr (řád) a a je parametr měřítka.

■ **Potlačení:**

- metody založené na statistickém modelu šumu.

Exponenciální šum

- **Exponenciální šum** je jednoduchý statistický model šumu s **kladnými hodnotami** a výraznou asymetrií.
- Speciální případ Erlangova s $k = 1$
- Často se používá jako základní model pro:
 - speckle šum,
 - některé typy lékařského zobrazování.
- **Statistický model:**
 - šum má exponenciální rozdělení,
 - střední hodnota: $\bar{n} = \frac{1}{a}$,
 - rozptyl: $\text{Var}(n) = \frac{1}{a^2}$.
 - PDF:

$$p(n) = \begin{cases} ae^{(-an)}, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

kde $a > 0$ je parametr rozdělení.

- **Vlastnosti:**
 - pouze kladné hodnoty,
 - silně nesymetrické rozdělení.

Uniformní šum

- **Uniformní šum** je model šumu, ve kterém jsou hodnoty šumu **rovnoměrně rozloženy** v určitém intervalu.
- Často se používá jako:
 - jednoduchý simulační model,
 - aproximace kvantizačního šumu.
- **Statistický model:**
 - šum má rovnoměrné (uniformní) rozdělení,
 - střední hodnota: $\bar{n} = \frac{a + b}{2}$,
 - rozptyl: $\text{Var}(n) = \frac{(b - a)^2}{12}$.
 - hustota pravděpodobnosti:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a \leq n \leq b, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $[a, b]$ je interval hodnot šumu.

- **Vlastnosti:**
 - konečný rozsah hodnot,
 - žádná preference konkrétních hodnot.
- **Potlačení:** lineární filtrace (průměrování), mediánový filtr (u kvantizačního šumu)

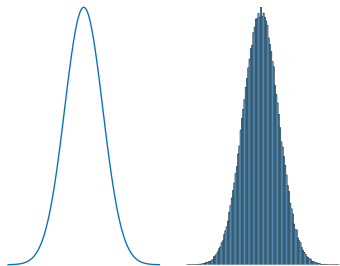
Impulzní šum (sůl a pepř)

- **Impulzní šum (sůl a pepř)** se projevuje jako náhodné **extrémně světlé a tmavé pixely** v obraze.
- Název vychází z vizuální podoby:
 - **sůl** – bílé (maximální) hodnoty,
 - **pepř** – černé (minimální) hodnoty.
- **Vznik:**
 - chyby přenosu dat,
 - poruchy senzorů,
 - chybné paměťové buňky nebo přepínání bitů.
- **Statistický model:**
 - pixel je s určitou pravděpodobností nahrazen minimální nebo maximální hodnotou,
 - jinak zůstává nezměněn:

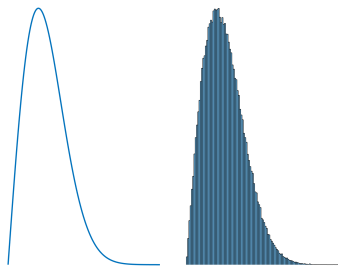
$$g(x, y) = \begin{cases} I_{\min}, & \text{s pravděpodobností } p_1, \\ I_{\max}, & \text{s pravděpodobností } p_2, \\ f(x, y), & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Potlačení: **mediánový filtr**

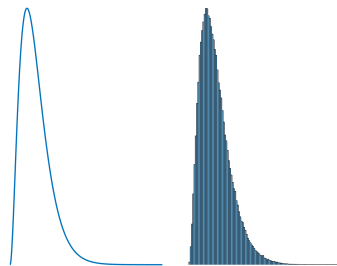
Typy šumu



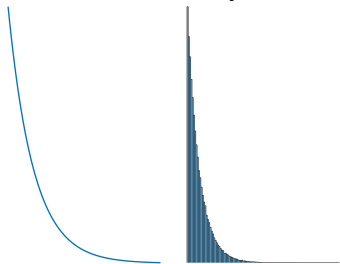
Gaussovský



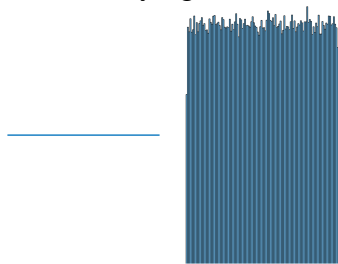
Rayleighův



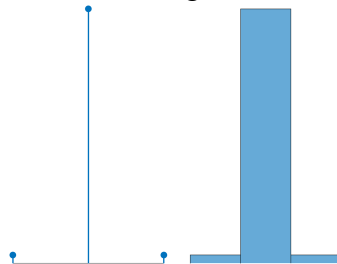
Erlangův



Exponenciální

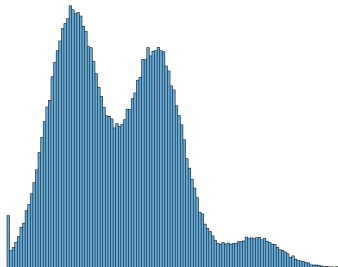
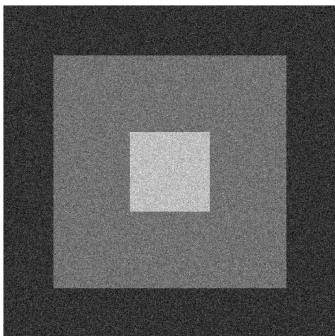


Uniformní

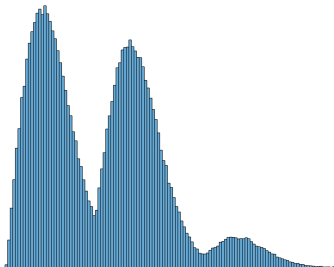
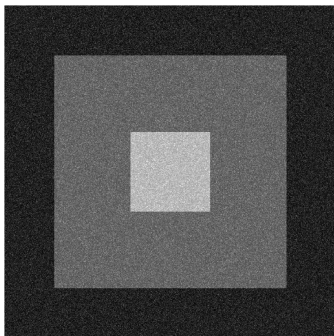


Sůl a pepř

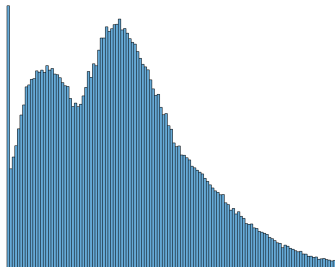
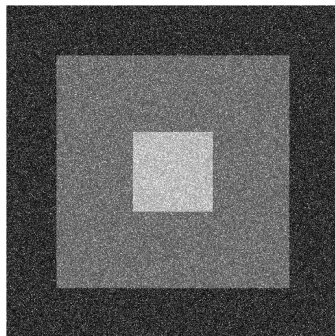
Typy šumu



Gaussovský

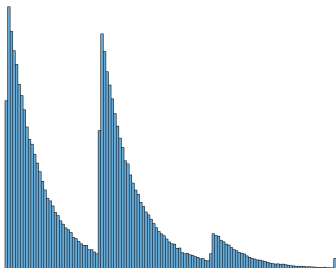
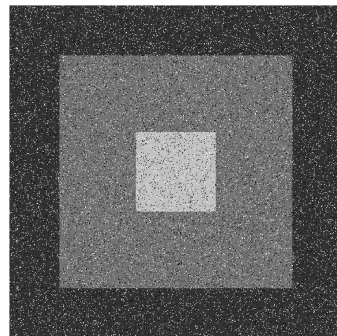
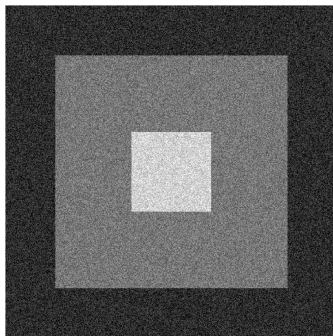
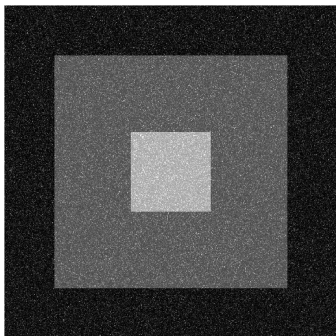


Rayleighův

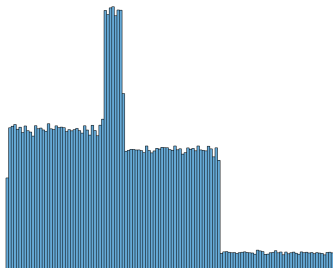


Erlangův

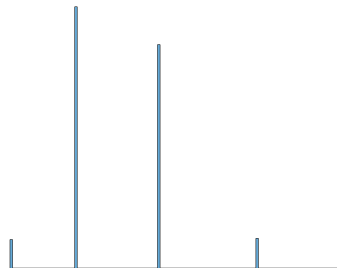
Typy šumu



Exponenciální



Uniformní



Sůl a pepř

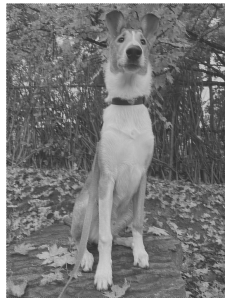
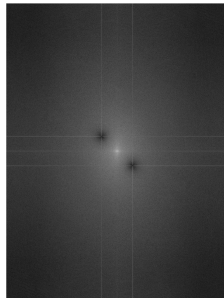
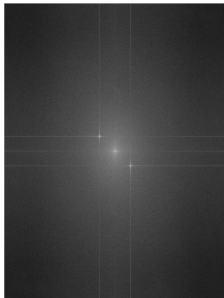
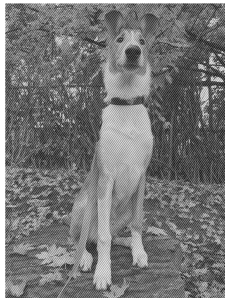
Periodický šum

- **Periodický šum** se projevuje jako **pravidelné struktury** (pruhy, mřížky, vlnění) překrývající obraz.
- Typicky vzniká:
 - rušením při snímání (elektrické napájení, vibrace),
 - mechanickými oscilacemi snímacího zařízení,
 - chybami při skenování nebo přenosu obrazu.
- **Model:**
 - lze jej aproximovat součtem sinusových složek:

$$g(x, y) = f(x, y) + \sum_k A_k \sin(2\pi(u_k x + v_k y) + \phi_k).$$

- **Vlastnosti:**
 - silně korelovaný v prostoru,
 - úzce lokalizovaný ve **frekvenční doméně**,
 - ve spektru se objevuje jako **izolované symetrické vrcholy**.
- **Potlačení:**
 - **zářezové (notch) filtry** ve frekvenční doméně,
 - selektivní filtrace konkrétních frekvenčních složek

Periodický šum

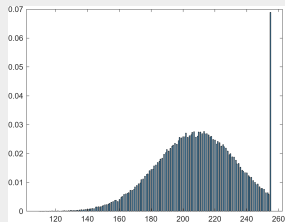


Odhad parametrů šumu

- **Periodický šum:** inspekce Fourierova spektra
- **Aditivní šum:** podle PDF
 - buď dokážeme sehnat snímek s konstantní hodnotou (šum přidávaný při akvizici)
 - vezmeme malou část s relativně jednodlitou hodnotou a vykreslíme histogram

Příklad

Jaký šum je přítomný v následujícím obrázku?



Odhad parametrů šumu

- Z histogramu odvodíme střední hodnotu a rozptyl

$$\bar{n} = \sum_{i=0}^{L-1} n_i p_S(n_i)$$

p_S je normalizovaný histogram

$$\text{Var}(n) = \sum_{i=0}^{L-1} (n_i - \bar{n})^2 p_S(n_i)$$

- z těchto hodnot odhadneme, jaký typ šumu je přítomen
- u šumu typu sůl a pepř z histogramu pro 0 a 1 odvodíme jejich pravděpodobnosti

Rekonstrukce obrazu

- předpokládáme, že $g(x, y) = f(x, y) + \eta(x, y)$, respektive $G(x, y) = F(x, y) + N(x, y)$
- nevíme, přesné umístění šumu (je náhodný), nelze ho od obrazu odečíst (toto obecně neplatí pro periodický šum)
- používáme filtrování v prostorové doméně k jeho potlačení (viz KMA/OBR)
Dále uvedeme jen krátce některé filtry z prostorové domény.

Průměrovací filtry

■ Aritmetický průměr:

- průměrná hodnota pixelů pod filtračním oknem ($m \times n$, S_{xy} představuje souřadnice okolí pixelu (x, y))
- $\bar{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)$
- můžeme ho modelovat filtrem, který obsahuje všechny hodnoty rovny $1/mn$
- vyhlazuje lokální odchylky, rozmazává obraz

■ Geometrický průměr:

- hodnota pixelu je rovna součinu pixelů pod filtračním oknem odmocněna jejich počtem
- $\bar{f}(x, y) = [\prod_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)]^{\frac{1}{mn}}$
- vyhlazuje lokální odchylky, méně rozmazává obraz

Průměrovací filtry



Gaussovský šum



Aritmetický průměr



Geometrický průměr

Průměrovací filtry

■ Harmonický průměr:

- $\bar{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} \frac{1}{g(r,c)}}$
- pracuje dobře pro šum typu sůl, ale ne pepř

■ Kontra harmonický průměr:

- $\bar{f}(x, y) = \frac{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)^{Q+1}}{\sum_{(r,c) \in S_{xy}} g(r,c)^Q}$
- Q je řád filtru
- pro kladná Q eliminuje pepřový šum, pro záporná typu sůl (nikdy ne obojí)

Příklad

Jak se bude chovat Kontra harmonický průměr, když bude $Q = 0$?

Jak se bude chovat Kontra harmonický průměr, když bude $Q = -1$?

Průměrovací filtry



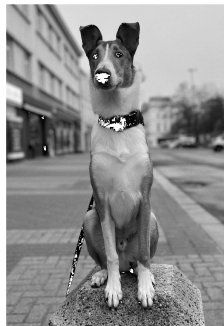
Šum sůl



Harmonický průměr



KH $Q = 1.5$



KH2 $Q = -1.5$

Průměrovací filtry



Šum pepř



Harmonický průměr



KH $Q = 1.5$

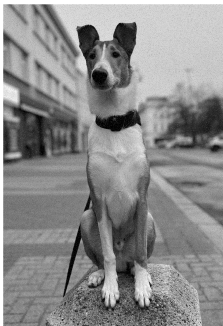


KH $Q = -1.5$

Statistické filtry

- Nelineární filtry, bereme okolní pixely a nad nimi děláme nějakou statistiku
- **Mediánový filtr:**
 - nejznámější
 - $\hat{f}(x, y) = \text{median}_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)$
 - skvělé výsledky pro náhodný šum, zejména sůl a pepř
 - nedochází k rozmazání, jako u lineárních filtrů
- **Max filtr:**
 - místo mediánu bereme 100 percentil
 - $\hat{f}(x, y) = \max_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)$
 - vhodný pro hledání nejsvětlejších částí v obraze (rozšiřuje je na velikost filtračního okna)
- **Min filtr:**
 - místo mediánu bereme 0 percentil
 - $\hat{f}(x, y) = \min_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c)$
 - vhodný pro hledání nejtmavších částí v obraze

Statistické filtry



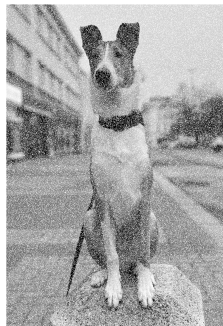
Šum sůl a pepř



Min filtr



Medián filtr



Max filtr

Statistické filtry

■ Midpoint filtr:

- Z pixelů v okolí vezme nejvyšší a nejnižší hodnotu a vrátí hodnotu přesně uprostřed
- $\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} (\min_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c) + \max_{(r,c) \in S_{xy}} g(r, c))$

■ Alpha-trimmed mean filtr:

- Z okolí pixelu odstraníme $d/2$ nejvyšších a $d/2$ nejnižších hodnot
- Ze zbylých pixelů (g_R) v okolí vezme průměrnou hodnotu
- $\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn-d} \sum_{(r,c) \in S_{xy}} g_R(r, c)$
- hodí se na minimalizaci různých typů šumu

Příklad

Jak bude vypadat filtr, pokud za d zvolíme 0?

Jak bude vypadat filtr, pokud bude d rovno $mn - 1$?

Adaptivní filtry

- Dříve uvedené filtry se aplikují na celý obrázek bez ohledu na to, zda se charakteristiky obrázku nemění
- Uvedeme si dva příklady filtrů, které pracují na základě statistických charakteristik v jednotlivých částech obrazu (uvnitř filtračního okna)
- Tyto filtry dávají lepší výsledky než klasické filtry, ale mají vyšší výpočetní náročnost

Adaptivní Local noise reduction filtr

- nejjednodušší statistické míry – průměr a variance
- průměr = míra průměrné intenzity (světlost) okolí bodu
- variance = kontrast v okolí
- označení:
 - S_{xy} okolí definované filtrem (se středem v bodě (x, y))
 - $g(x, y)$ obrázek obsahující šum
 - σ_{η}^2 variance šumu
 - $\bar{z}_{S_{xy}}$ lokální průměrná hodnota
 - $\sigma_{S_{xy}}^2$ lokální variance šumu
- Filtr by se měl chovat následovně:
 - Pokud σ_{η}^2 je nulová, filtr by měl vrátit $g(x, y)$
 - Pokud je lokální variance $\sigma_{S_{xy}}^2$ vysoká relativně k varianci šumu σ_{η}^2 , měl by filtr vrátit hodnotu blízkou $g(x, y)$. Vysoká variance odpovídá například hranám a tudíž by měla být zachována.
 - Pokud se variance rovnají $\sigma_{S_{xy}}^2 = \sigma_{\eta}^2$ chceme, aby filtr vrátil aritmetický průměr pixelů v okolí. Předpokládáme, že se zde objevuje šum, který bychom měli redukovat.

Adaptivní Local noise reduction filtr

- Příkladem může být následující funkce
- $\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_{S_{xy}}^2} [g(x, y) - \bar{z}_{S_{xy}}]$
- jediná neznámá je variance šumu σ_{η}^2 , už jsme si uvedli, jak bychom jí mohli odhadnout

Příklad

Jak bychom mohli odhadnout varianci šumu?

Adaptivní Local noise reduction filtr

- Gaussovský šum s variancí 0.005
- Velikost filtrů 7×7



Původní obrázek



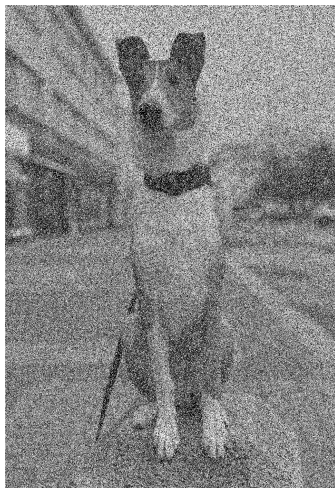
Adaptivní průměrovací filtr



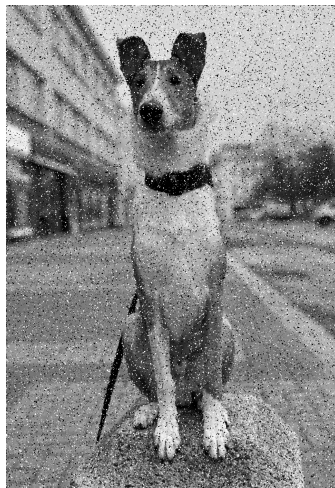
Průměrovací filtr

Adaptivní mediánový filtr

- Mediánový filtr pracuje dobře pro obrázky, kde je přítomen šum typu sůl a pepř (Ale! jen pokud jsou pravděpodobnosti výskytu obou menší než 0.2)
- Na obrázku je $P_s = 0.25$ a $P_p = 0.25$



Původní obrázek



Mediánový filtr

Adaptivní mediánový filtr

- adaptivní mediánový filtr pracuje dobře i na jiných typech šumu (i na kterých klasický mediánový filtr selhává)

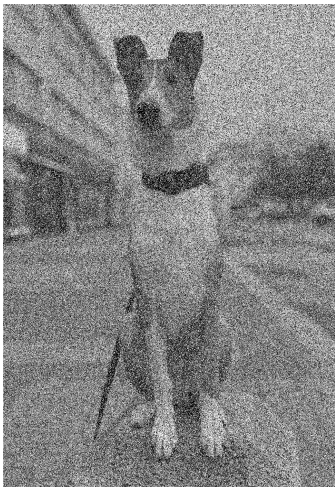
Příklad

S jakým typem šumu si mediánový filtr neporadí?

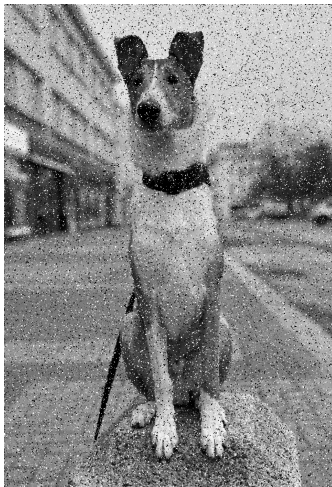
Adaptivní mediánový filtr

- Pracujeme s okolím pixelu S_{xy} , ale velikost okolí se při filtrování mění
- označení:
 - z_{min} nejmenší hodnota v S_{xy}
 - z_{max} největší hodnota v S_{xy}
 - z_{med} medián v S_{xy}
 - z_{xy} hodnota pixelu (x, y)
 - S_{max} největší povolená velikost okolí
- Algoritmus:
 - Level A:
 - Pokud $z_{min} < z_{med} < z_{max}$ jdi na Level B
 - Jinak zvětši velikost S_{xy}
 - Pokud $S_{xy} \leq S_{max}$ opakuj Level A, jinak vrať z_{med}
 - Level B:
 - Pokud $z_{min} < z_{xy} < z_{max}$ vrať z_{xy} , jinak vrať z_{med}

Adaptivní mediánový filtr



Původní obrázek

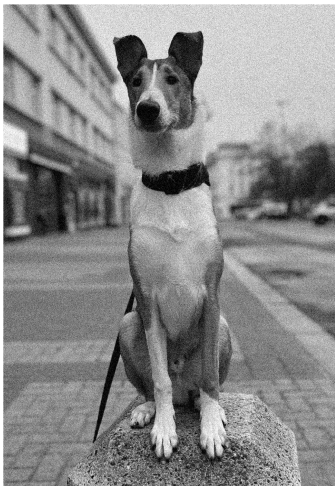


Mediánový filtr

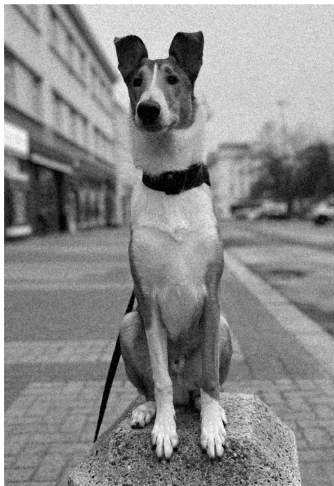


Adaptivní mediánový filtr

Adaptivní mediánový filtr



Gaussovský šum



Mediánový filtr

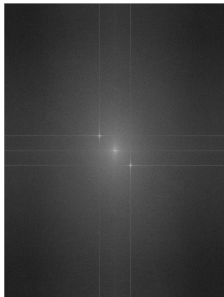


Adaptivní mediánový filtr

Periodický šum



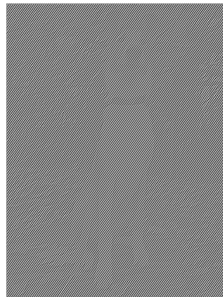
Originál



Spectrum



Výsledek po BRF



Výsledek po BPF

Lineární, prostorově invariantní degradace

- Degradace: $g(x, y) = \mathcal{H}[f(x, y)] + \eta(x, y)$
- Lineární znamená, že degradaci je možné popsat lineárním operátorem (konvolucí)
 $\mathcal{H}[af_1(x, y) + bf_2(x, y)] = a\mathcal{H}[f_1(x, y)] + b\mathcal{H}[f_2(x, y)]$
- Prostorově invariantní znamená, že je nezávislá na poloze
 $\mathcal{H}[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$
- Předpokládáme, že $\eta(x, y) = 0$
- Pokud máme lineární a prostorově invariantní systém (LSI), pak je degradační operátor plně určen svou odezvou na jednotkový impulz – **Point spread function** (h)
 $g(x, y) = h \star f(x, y)$
- Všechny fyzické optické systémy rozostří (spread) do nějaké míry bod světla – míra rozostření je dána kvalitou optických komponent
- Pomocí LSI můžeme aproximovat velké množství degradací v obraze (ideální model)
- Ukážeme si, jak odhadovat tento model a techniky, jak rekonstruovat degradovaný obraz
- Připomeňme si, že konvoluce v prostorové doméně odpovídá násobení ve frekvenční doméně
 $h \star f(x, y) \leftrightarrow H \cdot F$

Odhad degradační funkce

- Základní přístupy:
 - Odhad z pozorování
 - Experimentální určení
 - Matematické modelování
- Proces rekonstrukce původního obrazu z takto odhadnuté degradační funkce se nazývá **blind deconvolution** (slepá dekonvoluce)
- Skutečná degradační funkce je jen zřídka zcela známa

Odhad degradační funkce

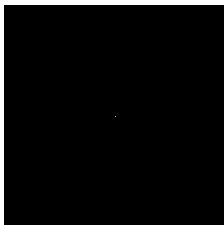
Pozorováním

- Máme degradovaný obrázek a nemáme žádnou informaci o degradační funkci (jenom předpokládáme, že se jedná o LSI)
- Informaci o této degradaci zjišťujeme přímo z obrazu
- Např. Pokud je obrázek rozostřený, podíváme se na malou čtvercovou oblast, která obsahuje nějaký objekt ale i pozadí. Snaha je najít úpravu obrazu tak, aby výsledný podobrázek byl co nejméně rozmazaný.
- označení:
 - $g_s(x, y)$ podobrázek, ze kterého budeme odhadovat degradaci
 - $\hat{f}_s(x, y)$ podobrázek, který bychom chtěli dostat po úpravě
$$H_s(u, v) = \frac{G_s(u, v)}{\hat{F}_s(u, v)}$$
- Z vlastností $H_s(u, v)$ odvodíme degradační funkci celého obrazu $H(u, v)$
- Např. Vidíme, že $H_s(u, v)$ má tvar gaussovské křivky, zkonstruujeme $H(u, v)$ větší, ale se stejnou křivkou
- Dále si povíme, jak tuto funkci $H(u, v)$ použít k rekonstrukci

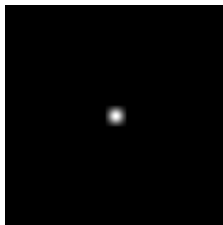
Odhad degradační funkce

Experimentálně

- Máme přístup k zařízení, pomocí kterého jsme získali degradovaný obrázek
- Nasnímáme obraz obsahující světlou tečku tím získáme impulse response degradační funkce
- Víme, že pokud víme, jak vypadá odpověď na tečku, dokážeme určit degradační funkci
$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$
 $G(u, v)$ je degradovaný obraz
 A konstanta, která určuje sílu impulsu



Impuls



Odezva

Odhad degradační funkce

Matematické modelování

- Degradace obrazu může být způsobena prostředím

- Např. Atmosférické turbulence

$$H(u, v) = e^{-k(u^2+v^2)^{5/6}}$$

k je konstanta, která je závislá na povaze turbulence (nižší číslo, menší turbulence)



Originál



$k = 0.0025$



$k = 0.001$



$k = 0.00025$

Odhad degradační funkce

Matematické modelování

- Degradace způsobená při akvizici
- Např. Pohyb senzoru při snímání, $x_0(t)$, $y_0(t)$ funkce pohybu během
- Celková expozice v daném bodě záznamového média je dána integrálem okamžité expozice přes dobu otevření závěrky zobrazovacího systému.

$$H(u, v) = \int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]} dt$$

- Pro $y_0(t) = 0$ a $x_0(t) = at/T$ (v čase T došlo k pohybu v ose x o a)

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi ua} \sin(\pi ua) e^{-j\pi ua}$$



Originál



Pohyb o 100 px

Inverzní filtrování

- Máme degradovaný obrázek $G(u, v)$ a odhadnutou degrační funkci $H(u, v)$
- Rekonstruovaný obrázek získáme přímo
$$\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)}$$
(dělení prvek po prvku)
- Pokud je v obrázku přítomen i šum, pak bychom dostali
$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$
- Což vede k tomu, že přímé inverzní filtrování nevrací velmi dobré výsledky



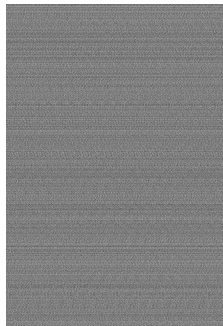
Bez šumu



Inverzní filtrování



Gaussovský šum



Inverzní filtrování

Inverzní filtrování

- K řešení tohoto se používají z $\frac{G(u,v)}{H(u,v)}$ pouze frekvence blízko počátku

Příklad

Jakým způsobem získáme jen hodnoty blízko počátku?

Inverzní filtrování

- K řešení tohoto se používají z $\frac{G(u,v)}{H(u,v)}$ pouze frekvence blízko počátku
- V příkladu níže používáme Butterworthův LPF k odstranění vysokých frekvencí $> f_0$



Originál



$f_0 = 0.01$



$f_0 = 0.02$



$f_0 = 0.03$

Wienerovo filtrování

- Wienerovo filtrování = minimum mean square error filtr
- Inverzní filtrování si neporadí s šumem
- Do procesu rekonstrukce obrazu zanášíme nejen informaci o degradační funkci, ale i charakteristiky šumu
- Obrázky i šum jsou považovány za náhodné proměnné
- Hledáme odhad \hat{f} tak, aby byla chyba mezi f (nedegradovaný obrázek) a \hat{f} minimální
- Předpokládáme, že šum a degradační funkce jsou nekorelované
- Označení:
 - $S_F(u, v)$ – power spektrum signálu
 - $S_N(u, v)$ – power spektrum šumu
 - $H^*(u, v)$ – komplexně sdružená hodnota $H(u, v)$
 - $E\{\cdot\}$ – střední hodnota
 - K – konstanta aproximující poměr $\frac{S_N}{S_F}$
- Filtr:
$$W(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \frac{S_N(u, v)}{S_F(u, v)}}$$
- $$\hat{F}(u, v) = W(u, v) G(u, v)$$

Wienerovo filtrování

- Zjednodušený tvar (při $\frac{S_N}{S_F} = K$):

$$W(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + K}$$



Originál



Inverzní filtrování



Wiener $K = 0.01$



Wiener $K = 0.05$

Constrained Least Squares (CLS) Filtering

- Předchozí metoda potřebuje mít nějakou znalost o degradaci a také o šumu (jeho power spektrum)
- Nyní nám bude stačit znát střední hodnoty a varianci šumu
- Minimalizační úloha:

$$\hat{f} = \arg \min_f \left\{ \|h * f - g\|^2 + \gamma \|pf\|^2 \right\}$$

- $\gamma > 0$ – regularizační parametr
- p – operátor hladkosti (např. Laplaceův operátor)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\hat{F}(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} G(u, v)$

Interpretace CLS

- Penalizujeme vysokofrekvenční složky řešení
- Stabilizujeme problém tam, kde $H(u, v) \approx 0$
- Nevyžaduje znalost spekter šumu a signálu
- **Rozdíl oproti Wienerovu filtru:**
 - Wiener minimalizuje MSE
 - CLS ukládá omezení na hladkost řešení



Originál



Inverzní filtrování



Wiener $K = 0.01$



CLS

Rekonstrukce z projekcí

- **Cíl:** rekonstruovat 2D obraz z jeho projekcí
- **Typická aplikace:** počítačová tomografie (CT)
- Měříme integrály podél přímk

$$p_{\theta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

- $p_{\theta}(s)$ – projekce pod úhlem θ
- s – vzdálenost od počátku

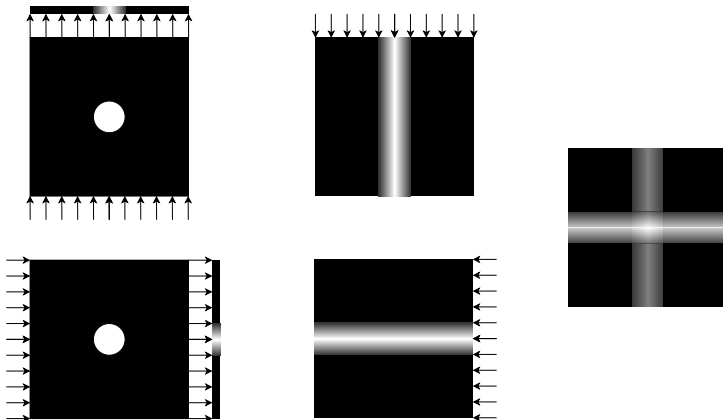
Radonova transformace

- Projekce jsou hodnoty **Radonovy transformace**

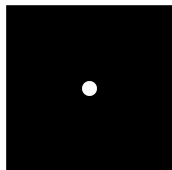
$$R\{f\}(\theta, s) = p_{\theta}(s)$$

- Geometrická interpretace:

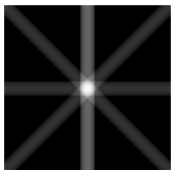
- každá projekce = součet hodnot podél rovnoběžných přímek
- rotací objektu získáme více projekcí



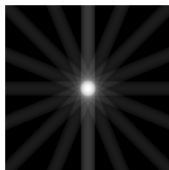
Radonova transformace



Originál



4



8



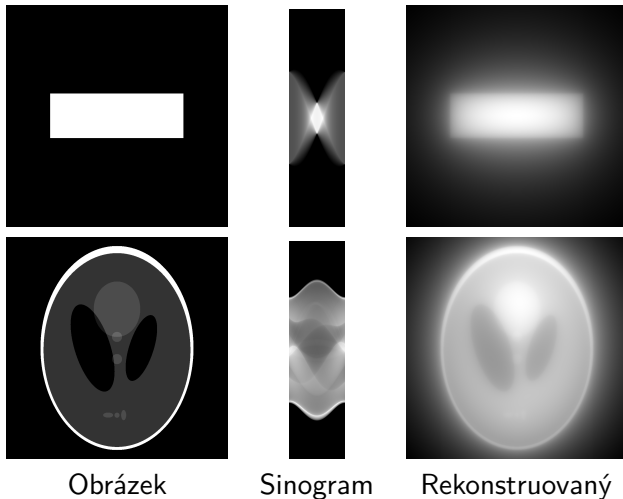
32



180

Radonova transformace

- Součtům podél jednotlivých směrů se říká **sinogram**



Fourierova projekční věta

- Říká, jaký je vztah mezi 1D Fourierovou transformací projekce a 2D Fourierovou transformací obrázku
- Fourierova transformace projekce odpovídá řezu 2D Fourierova spektra
$$\mathcal{F}_s\{p_\theta(s)\}(\omega) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$$
- Každá projekce poskytuje radiální řez spektra
- Dostatek úhlů \Rightarrow lze rekonstruovat celé spektrum
- **Označení:**
 - $f(x, y)$ – rekonstruovaný obraz
 - $F(u, v)$ – jeho 2D Fourierova transformace

$$F(u, v) = \iint f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- $p_\theta(s)$ – projekce pod úhlem θ
- \mathcal{F}_s – 1D Fourierova transformace podle s
- ω – 1D frekvenční proměnná

Fourierova projekční věta

- Rekonstrukce probíhá ve frekvenční oblasti
- Postup:
 - 1 Spočítat 1D FFT každé projekce
 - 2 Umístit výsledky do 2D spektra pod příslušným úhlem
 - 3 Interpolovat chybějící hodnoty
 - 4 Aplikovat 2D inverzní FFT

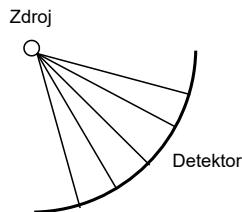
Fan-beam projekce

- Moderní CT přístroje nepromítají rovnoběžné paprsky, ale ve vějíři – zdroj záření je bodový
- Paprsky se šíří vějířovitě (fan-beam)
- Detektor je:
 - lineární (rovinný)
 - nebo obloukový (arc detector)
- Fan-beam data lze převést na paralelní projekce
- Geometrická transformace:

$$\theta = \beta + \gamma$$

$$s = D \sin \gamma$$

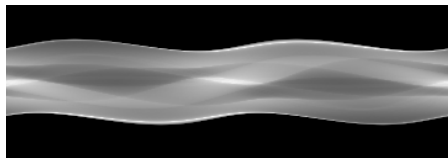
- Alternativně: přímá fan-beam FBP formule



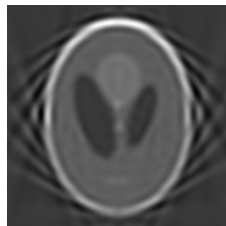
Fan-beam projekce



Obrázek



Sinogram



Rekonstruovaný