



# Topologie v obraze

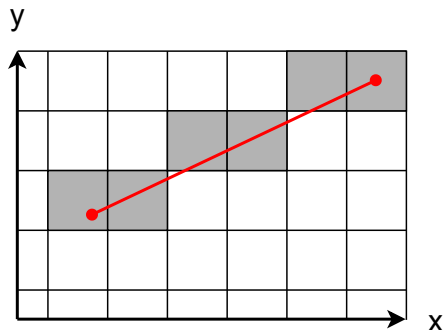
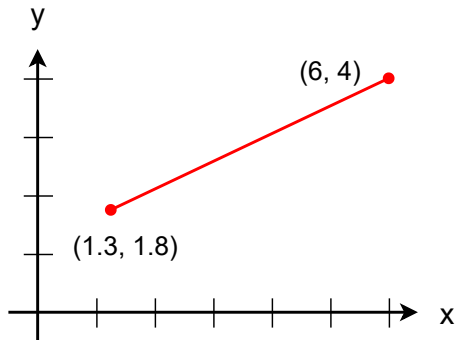
## Počítačová grafika

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

# Obraz

- **Matematický model:**  $g = f(x, y)$  (obrazová funkce)
- **Prostorové souřadnice:**  $x \in \langle x_{min}, x_{max} \rangle$  a  $y \in \langle y_{min}, y_{max} \rangle$
- **Hodnoty funkce  $g$ :**
  - jedno číslo
  - trojice (čtveřice) čísel
  - celá kolekce dat
- **Rastr**

## Spojité a rastrové zobrazení úsečky



Otázka je, jak zjistit, zda pixely tvoří souvislý objekt, nebo ne.

# Vztahy mezi pixely

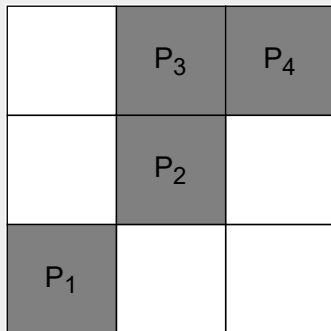
## Sousednost

- pixel  $p$  ( $[x, y]$ )
  - **4-sousedé** ( $N_4(p)$ ) –  $[x-1, y]$ ,  $[x+1, y]$ ,  $[x, y-1]$  a  $[x, y+1]$
  - **8-sousedé** ( $N_8(p)$ ) –  $N_4(p)$  a  $[x-1, y-1]$ ,  $[x-1, y+1]$ ,  $[x+1, y-1]$  a  $[x+1, y+1]$
  - **m-sousedé** ( $N_m(p)$ ) –  $q$ , pro které platí  $q \in N_4(p)$  nebo  $q \in N_8(p)$ , ale neexistuje  $r$  takové, že  $r \in N_4(p) \wedge r \in N_4(q)$   
mixed adjacency
- 
- pixely  $p, q$ , definovaná množina intenzit
  - **4-sousední** –  $q \in N_4(p)$
  - **8-sousední** –  $q \in N_8(p)$
  - **m-sousedé** –  $q \in N_m(p)$

## Vztahy mezi pixely

### Příklad

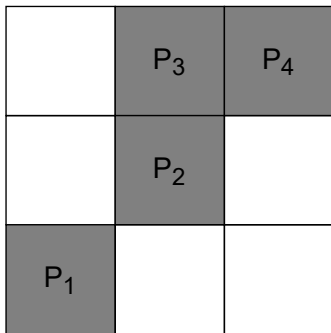
Určete vzájemnou sousednost pixelů  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  a  $P_4$  (v množině šedých pixelů) na následujícím obrázku.



## Vztahy mezi pixely

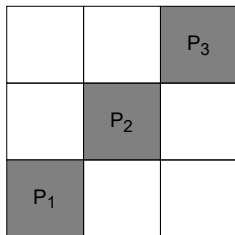
Řešení předchozího příkladu

- $P_1$  je 8-sousední pixelu  $P_2$ , se kterým je i m-sousední. S ostatními pixely nesousedí.
- $P_2$  je 8-sousední s pixely  $P_1$ ,  $P_3$  i  $P_4$ , 4-sousední je s pixelem  $P_3$  a m-sousední s pixelem  $P_1$ .
- $P_3$  je 4-sousední a tedy i 8-sousední s pixely  $P_2$  a  $P_4$ .
- $P_4$  je 8-sousední s pixely  $P_2$  a  $P_3$ . S  $P_3$  je dokonce 4-sousední.

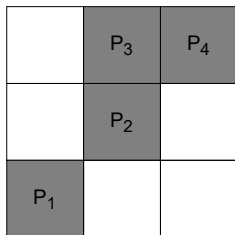


## Vztahy mezi pixely

- **Digitální cesta** z pixelu  $p$  ( $[x,y]$ ) do  $q$  ( $[s,t]$ ) – sekvence sousedních pixelů
- **4-cesta**, **8-cesta**, **m-cesta**



- m-sousednost se zavádí kvůli nejednoznačnosti  $\delta$ -spojitosti při definici cest (např. z  $P_1$  do  $P_4$ )

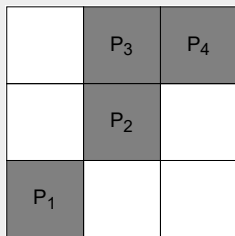


## Vztahy mezi pixely

- **Spojité** pixely  $p$  ( $[x, y]$ ),  $q$  ( $[s, t]$ ) – existuje cesta
- **4-spojité, 8-spojité, m-spojité**
- **Komponenta** – množina spojitých pixelů
- **4-komponenta, 8-komponenta, m-komponenta**

### Příklad

Kolik je v následujícím obraze komponent?



## Vztahy mezi pixely

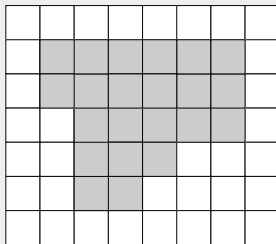
- **Oblast** (region) – množina pixelů, která je tvořena jednou komponentou (bereme v úvahu pouze 4- a 8- komponenty)
- **Sousední oblasti** – oblasti, jejichž sjednocení tvoří oblast
- **Disjunktní oblasti** – oblasti, které nejsou sousední
  
- předpokládejme, že v obraze máme  $k$  regionů,  $R_u$  bude jejich sjednocení – **popředí** (foreground)
- komplement  $R_u$  ( $(R_u)^C$ ) – **pozadí** (background)

## Vztahy mezi pixely

- **Okraj oblasti** (kontura) – množina pixelů oblasti, které sousedí s komplementem regionu (pozadím)

### Příklad

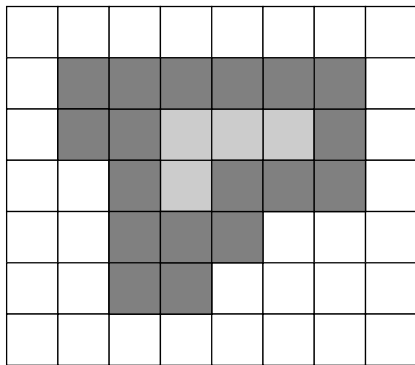
Předpokládejme, že máme 8-spojitou oblast. Jak bude vypadat okraj této oblasti?



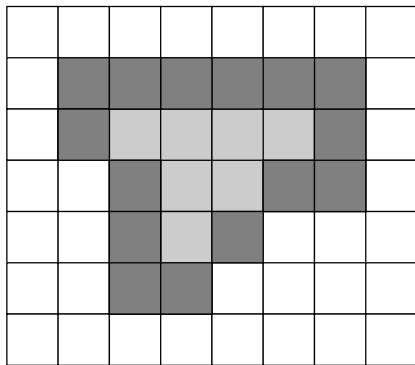
Jak by vypadal okraj, kdybychom oblast chápali jako 4-spojitou?

## Vztahy mezi pixely

Řešení předchozího příkladu



8-sousedná oblast

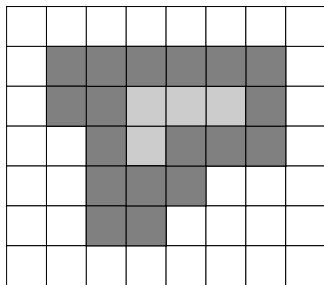


4-sousedná oblast

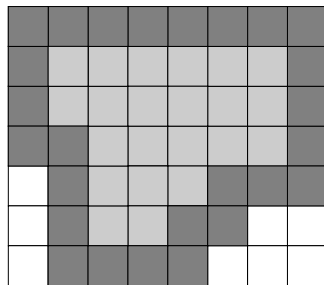
Všimněte si, kolikatisousedná cesta tvoří okraj které oblasti!

## Vztahy mezi pixely

- **Vnitřní okraj oblasti** – okraj definovaný dříve
- **Vnější okraj oblasti** – okraj oblasti, který je tvořen pixely z pozadí (pixely pozadí, které sousedí s oblastí)



vnitřní okraj



vnější okraj

Ve většině algoritmů pro hledání okrajů se bere v úvahu vnější okraj kvůli tomu, že chceme, aby okraj tvořil uzavřenou cestu. Což by v případě jednopixelové oblasti nebylo splněno, kdybychom uvažovali vnitřní okraj.

## Vzdálenosti v obraze

- $p$  ( $[x, y]$ ),  $q$  ( $[s, t]$ ) a  $r$  ( $[v, w]$ )
- **Metrika:**
  - 1  $D(p, q) \geq 0$ ,  $D(p, q) = 0 \iff p = q$
  - 2  $D(p, q) = D(q, p)$
  - 3  $D(p, q) \leq D(p, r) + D(r, q)$

## Vzdálenosti v obraze

- city block distance ( $D_4$ ):

$$D_4(p, q) = |x - s| + |y - t|$$

- $D_8$  vzdálenost:

$$D_8(p, q) = \max(|x - s|, |y - t|)$$

- Euklidovská vzdálenost ( $D_e$ ):

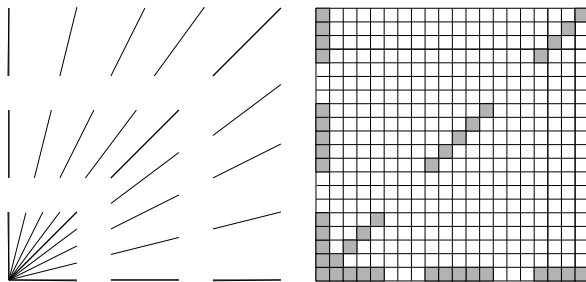
$$D_e = [(x - s)^2 + (y - t)^2]^{\frac{1}{2}}$$

4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	2	3
4	3	2	3	4

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

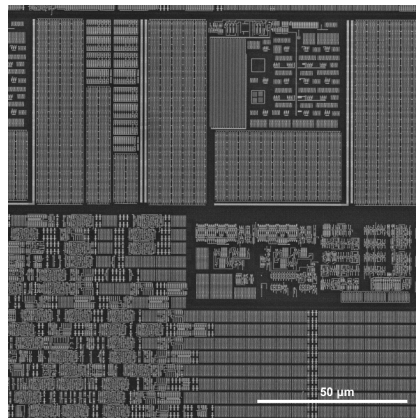
## Vzdálenosti v obraze

- porovnejte vzdálenosti  $D_8$  a  $D_e$  na následujících obrázcích



# Vzdálenosti v obraze

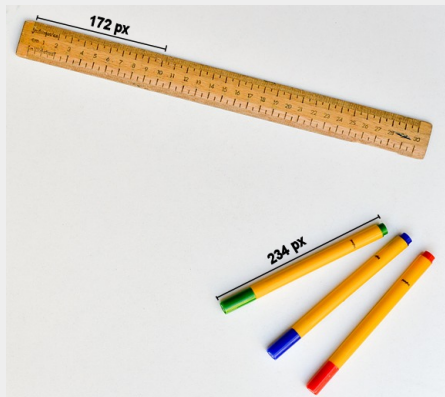
- reálná velikost  $\neq$  vzdálenost v obraze
- Kalibrační značka



## Vzdálenosti v obraze

### Příklad

Na následujícím obrázku je označena vzdálenost mezi číslem 0 a 10 na pravítku (tento počet pixelů představuje 10 cm) a také velikost fixy v pixelech. Jaká je skutečná velikost fixy?

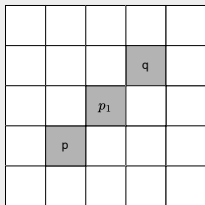


## Vzdálenosti v obraze

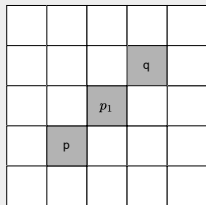
- vzdálenosti pixelů  $p$  ( $[x, y]$ ) a  $q$  ( $[s, t]$ ) definované dříve nejsou závislé na tom, zda mezi nimi existuje cesta nebo ne
- $D_m$  **vzdálenost** mezi pixely  $p$  ( $[x, y]$ ) a  $q$  ( $[s, t]$ ) definujeme jako délku nejkratší  $m$ -cesty mezi body

### Příklad

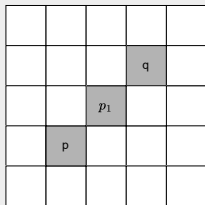
Určete  $m$ -vzdálenost mezi pixely  $p$  a  $q$  v následujících obrázcích.



(a)



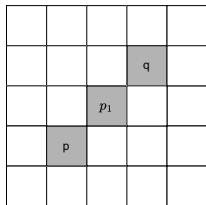
(b)



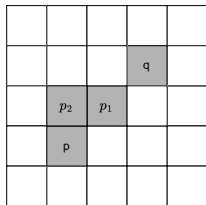
(c)

## Vzdálenosti v obraze

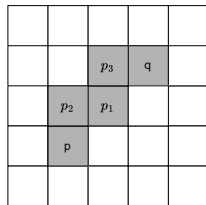
Řešení předchozího příkladu



(a)



(b)



(c)

(a) vzdálenost je 2 (cesta  $pp_1q$ )

(b)  $p$  a  $p_1$  už nejsou m-sousedé, vzdálenost je 3 (cesta  $pp_2p_1q$ )

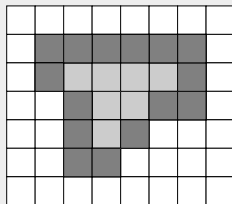
(c) vzdálenost je 4 (cesta  $pp_2p_1p_3q$ )

## Vlastnosti okrajů oblasti

- **Délka okraje** – aproximace počtem pixelů tvořící okraj oblasti
- pokud bychom chtěli přesnější vyjádření vzdálenosti, pak bychom sledovali cestu tvořící okraj
- pokud jsou pixely v cestě 4-sousední, pak je započítáme s délkou 1, 8-sousedné s délkou  $\sqrt{2}$

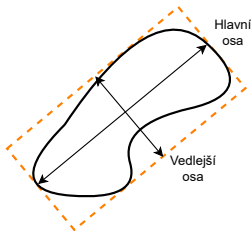
### Příklad

Pro následující okraj určete aproximaci délky i přesnější délku.



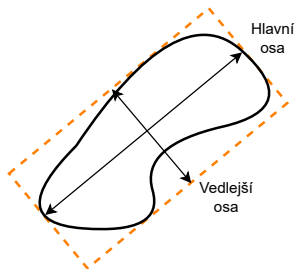
## Vlastnosti okrajů oblasti

- **Průměr okraje** – největší vzdálenost dvou pixelů tvořící okraj  $\max_{i,j}[D(p_i, p_j)]$
- tato hodnota spolu s orientací úsečky spojující tyto dva body – **hlavní osa** (major axis)
- předpokládejme  $p = [x_1, y_1]$  a  $q = [x_2, y_2]$  jsou nejvzdálenější body
$$délka_m = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$směr_m = \tan^{-1}\left[\frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}\right]$$
- **vedlejší osa** (minor axis) – linie, která je kolmá k hlavní ose a prochází středem hlavní osy
- délka vedlejší osy je taková, že obdélník procházející 4 koncovými body os obsahuje celý okraj oblasti



## Vlastnosti okrajů oblasti

- obdélník procházející 4 koncovými body os, který obsahuje celý okraj oblasti – **ohraničující obdélník** (bounding box)



# Vlastnosti okrajů oblasti

- **excentricita** – poměr hlavní a vedlejší osy

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

číslo mezi 0 a 1, které popisuje, jak „protažený“ je tvar

- **zakřivení křivky** – vyjadřuje, jak rychle se mění směr tečny podél této křivky

- **Interpretace**

- $\kappa = 0$  — křivka je v daném místě **přímá**
- $\kappa > 0$  — **konvexní bod**
- $\kappa < 0$  — **konkávní bod**

- **klikatost** (tortuosity) – vyjadřuje, jak moc je křivka „zvlněná“

Často se definuje jako poměr délky křivky  $L$  k přímé vzdálenosti mezi jejími koncovými body  $D$

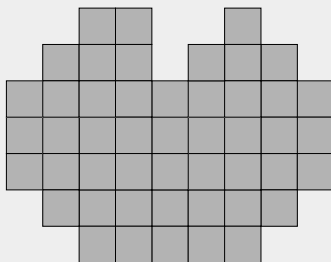
- tyto pojmy je těžké definovat pro diskrétní obrazy, nemůžeme spočítat tečnu, místo toho hranici aproximujeme lomenými čarami

## Vlastnosti oblastí

- **hlavní osa**, **vedlejší osa**, **ohraničující obdélník** – stejně definované jako u okrajů
- **obsah** ( $A$ ) – počet pixelů v oblasti
- **obvod** ( $p$ ) – délka okraje oblasti

### Příklad

Najděte hlavní a vedlejší osu, ohraničující obdélník a určete obsah a obvod následující (4-sousedné) oblasti.



## Vlastnosti oblastí

- obvod ( $p$ ) a obsah ( $A$ ) sami o sobě moc informace nenesou
- **kompaktnost oblasti** (compactness) – míra toho, jak moc je oblast podobná kruhu

$$\text{kompaktnost} = \frac{p^2}{A}$$

bezrozměrná veličina

- **kruhovitost oblasti** (circularity) – míra toho, jak moc je oblast podobná kruhu

$$\text{kruhovitost} = \frac{4\pi A}{p^2}$$

bezrozměrná veličina

- **efektivní průměr** (effective diameter) – průměr kruhu, který má stejný obsah

$$D_{ef} = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

### Příklad

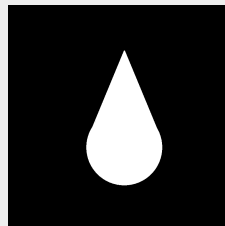
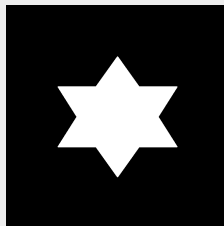
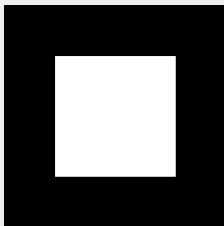
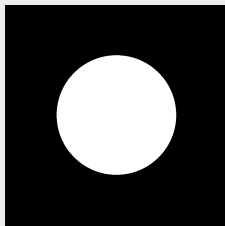
Jaká je kompaktnost a kruhovitost ideální kruhové oblasti?

Jaká je kompaktnost a kruhovitost ideální čtvercové oblasti?

## Vlastnosti oblastí

### Příklad

Zkuste odhadnout, jak bude vypadat kruhovitost, kompaktnost a excentricita následujících oblastí.



## Vlastnosti oblastí

Řešení předchozího příkladu



excentricita	0.008	0.000	0.473	0.820
kruhovitost	1.005	0.822	0.488	0.730
kompaktnost	12.50	15.29	25.76	17.20

### Příklad

Proč není kompaktnost prvního obrázku rovna ideální kompaktnosti kruhové oblasti?

## Vlastnosti oblastí

- **centriod** (střed oblasti, těžiště) – představuje bod, ve kterém by byla oblast v rovnováze, pokud by měla rovnoměrnou hustotu
- v diskrétním obraze = průměrná poloha všech pixelů tvořících danou oblast
$$x_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad y_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i,$$
 $(x_i, y_i)$  jsou všechny body oblasti,  $N$  je počet pixelů
- **konvexní obal oblasti** (Convex hull) – nejmenší konvexní oblast, která obsahuje všechny body (pixely) dané oblasti
- **extrémy oblasti** – souřadnice osmi „nejvzdálenějších“ bodů oblasti  
top-left, top-right, right-top, right-bottom, bottom-right, bottom-left, left-bottom, left-top



ohraničující obdélník



konvexní obal



centroid



extrémy

## Vlastnosti oblastí

- **Eulerovo číslo**  $E$  – rozdíl mezi počtem souvislých komponent a počtem děr

$$E = C - H,$$

kde  $C$  je počet komponent a  $H$  počet děr.

- **Solidita** (Solidity) – vyjadřuje, jak „vyplněný“ je konvexní obal oblastí.

Je definována jako poměr plochy oblasti k ploše jejího konvexního obalu

$$\text{solidita} = \frac{\text{plocha}}{\text{plocha\_konvexního\_obalu}}$$

### Příklad

Jaké je Eulerovo číslo následující oblasti?

