



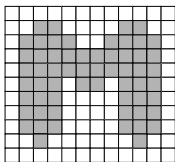
Matematická morfologie šedotónových obrázků

Počítačová grafika

Mgr. Markéta Trnečková, Ph.D.

Matematická morfologie

- **Morfologie** poskytuje **nástroje založené na teorii množin**, které pracují přímo s tvary (množinami bodů)
- binární obrázky – pixely jsou prvky \mathbb{Z}^2 (souřadnice x a y)
- šedotónové obrázky – pixely jsou prvky \mathbb{Z}^3 (prostorové souřadnice, intenzita)
- **dva typy množin** (v matematické morfologii):
 - objekty – pixely popředí a pozadí



- strukturní element (SE) – pixely popředí, pozadí a „don't care“



Matematická morfologie

reflexe	$\hat{B} = \{(-x, -y) (x, y) \in B\}$	zrcadlí B kolem počátku
translace	$(B)_z = \{(x + x_z, y + y_z) (x, y) \in B\}$	posouvá B o vektor $z = (x_z, y_z)$
komplement	$A^c = \{w w \notin A\}$	množina bodů, které nejsou v A
rozdíl	$A - B = \{w w \in A, w \notin B\}$	množina bodů A , které nejsou v B
eroze	$A \ominus B = \{z (B)_z \subseteq A\}$	zmenšuje objekty, odstraňuje malé objekty
dilatace	$A \oplus B = \{z \in E (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$	zvětšuje objekty, zaceluje malé díry
otevření	$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$	odstraňuje malé izolované objekty, vyhlazuje obrysy objektů
uzavření	$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$	spojuje blízké objekty, vyhlazuje obrysy
Hit-or-Miss transformace	$A \circledast B_{1,2} = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$	identifikuje v A přesné struktury dané B_1 a B_2
hledání obrysu	$\text{obrys}(A) = A - (A \ominus B)$	množina bodů na okraji objektu
vypĺňování děr	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$	vypĺňuje díry v obraze
spojité komponenty	$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$	oddělení jednotlivých objektů
konvexní obal	$X_k^i = (X_{k-1}^i \circledast B^i) \cup X_{k-1}^i \cup_{i=1}^4 D^i$	aproximuje konvexní obal

Matematická morfologie

ztenčení	$A \otimes B_i = ((\dots ((A \otimes B_1) \otimes B_2) \dots) \otimes B_n)$ $A \otimes B = A - (A \circledast B)$	ztenčí obrázek pomocí sekvence SE
zesílení	$A \odot B_i = ((\dots ((A \odot B_1) \odot B_2) \dots) \odot B_n)$ $A \odot B = A \cup (A \circledast B)$	zvětší obrázek pomocí sekvence SE
kostra	$S(A) = \bigcup_{k=0}^K [(A \ominus kB) - (A \ominus kB) \circ B]$ $A \ominus kB = (((\dots ((A \ominus B) \ominus B) \dots) \ominus B), k \text{ krát}$	jednoplexová kostra A
geodetická dilatace	$D_G^{(1)}(F) = (F \oplus B) \cap G$ $D_G^{(n)}(F) = D_G^{(1)}(D_G^{(n-1)}(F))$	F marker, G maska
geodetická eroze	$E_G^{(1)}(F) = (F \ominus B) \cup G$ $E_G^{(n)}(F) = E_G^{(1)}(E_G^{(n-1)}(F))$	F marker, G maska
rekonstrukce dilatací	$R_G^{(D)}(F) = D_G^{(k)}(F)$	F marker, G maska
rekonstrukce erozí	$R_G^{(E)}(F) = E_G^{(k)}(F)$	F marker, G maska

Matematická morfologie

otevření rekonstrukcí $O_R^{(n)}(F) = R_F^{(D)}(F \ominus B)$

uzavření rekonstrukcí $C_R^{(n)}(F) = R_F^{(E)}(F \oplus B)$

vyplnění děr $H = [R_{I^c}^{(D)}(F)]^c$

vyčištěné okraje $X = I - R_I^{(D)}(F)$

dilatací rekonstruuje erodovaný obrázek

erozí rekonstruuje dilatovaný obrázek

obrázek s vyplněnými dírami

obrázek bez struktur dotýkajících se okraje

Morfologie šedotónových obrázků

- morfologické operace lze zobecnit i na **šedotónové obrazy**, kde každý pixel má **intenzitu**
- **Vstupní obraz**: $f(x, y) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, L - 1]$
např. $L = 256$ pro 8bitový obraz
- **Strukturní element (SE)** určuje, jak se lokálně kombinuje jas pixelů

Rozlišujeme dva typy:

- **Flat (plochý) SE**: má pouze tvar, bez výškových hodnot
 $B = \{(s, t)\}$
odpovídají klasickým binárním operacím
- **Nonflat (neplochý) SE**: každému bodu (s, t) přiřazuje i **výškovou hodnotu** $b(s, t)$
 $B = \{(s, t, b(s, t))\}$
dovolují jemnější zpracování intenzit (např. vyhlazování, potlačení šumu)



Morfologie šedotónových obrázků

- flat SE se dají chápat jako nonflat s výškou rovnou 0 pro všechny pixely
- nonflat SE se v praxi příliš nepoužívají
- opět je potřeba definovat jádro, abychom mohli definovat operace reflexe a translace
Pokud není vyznačeno, bere se střed.
- **reflexe:** $\hat{B} = \{(-x, -y) | (x, y) \in B\}$

Šedotónová eroze

- eroze v šedotónové morfologii zmenšuje svetlé oblasti obrazu a zvyšuje kontrast hran
- princíp podobný jako korelace, posouváme SE po celém obraze s tím, že počátek B leží na souřadnicích (x, y)
- **nonflat SE:** $(f \ominus B)(x, y) = \min_{(s,t) \in B} [f(x + s, y + t) - b(s, t)]$
- **flat SE:** $(f \ominus B)(x, y) = \min_{(s,t) \in B} f(x + s, y + t)$
u flat operátoru je $b(s, t) = 0$, pro všechna (s, t)



Šedotónová dilatace

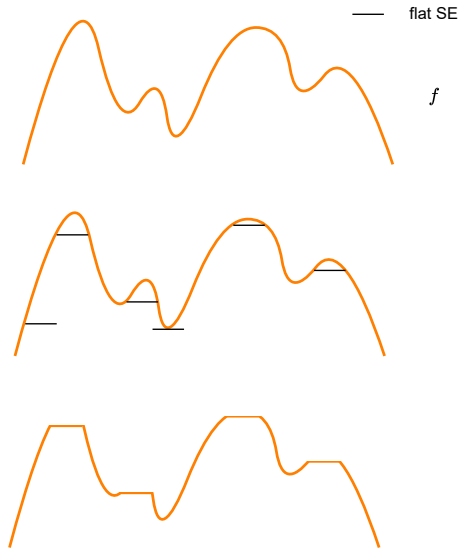
- dilatace v šedotónové morfologii zvětšuje světlé oblasti obrazu a vyplňuje tmavé mezery
- **nonflat SE:** $(f \oplus B)(x, y) = \max_{(s,t) \in B} [f(x + s, y + t) - b(s, t)]$
- **flat SE:** $(f \oplus B)(x, y) = \max_{(s,t) \in B} f(x + s, y + t)$



- i v šedotónovém případě platí dualita eroze a dilatace

Šedotónové otevření

- odstraňuje malé světlé oblasti a vyhlazuje přechody, aniž by deformovalo větší struktury
- eroze následovaná dilatací se stejným SE
- $f \circ B = ((f \ominus B) \oplus B)$



Šedotónové otevření



Šedotónové otevření

Příklad

Co se stane s obrázkem, pokud na něj aplikujeme otevření se stejným SE dvakrát?

Šedotónové otevření

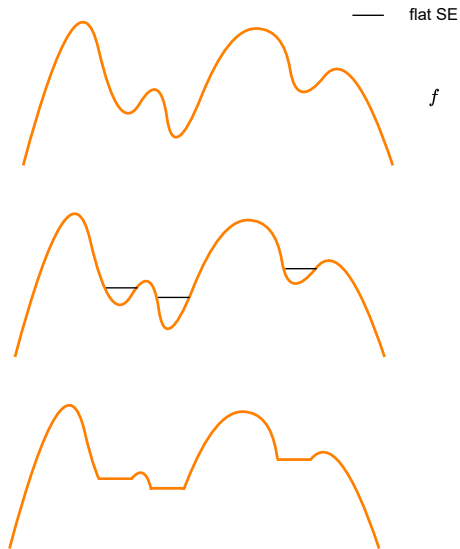
Příklad

Co se stane s obrázkem, pokud na něj aplikujeme otevření se stejným SE dvakrát?

- nezmění se, platí: $(f \circ B) \circ B = f \circ B$
- dále platí: $(f \circ B) \subseteq f$
- dále platí: pokud $f_1 \subseteq f_2$ pak $(f_1 \circ B) \subseteq (f_2 \circ B)$
to samé platí i v klasické (binární) morfologii

Šedotónové uzavření

- vyplňuje malé tmavé oblasti a vyhlazuje přechody mezi světlými oblastmi bez deformace velkých struktur
- dilatace následovaná erozí se stejným SE
- $f \bullet B = ((f \oplus B) \ominus B)$



Šedotónové uzavření



Šedotónové uzavření

Příklad

Co se stane s obrázkem, pokud na něj aplikujeme uzavření se stejným SE dvakrát?

Šedotónové uzavření

Příklad

Co se stane s obrázkem, pokud na něj aplikujeme uzavření se stejným SE dvakrát?

- nezmění se, platí: $(f \bullet B) \bullet B = f \bullet B$
- dále platí: $f \subseteq (f \bullet B)$
- dále platí: pokud $f_1 \subseteq f_2$ pak $(f_1 \bullet B) \subseteq (f_2 \bullet B)$
to samé platí i v klasické (binární) morfologii

Open-close operace

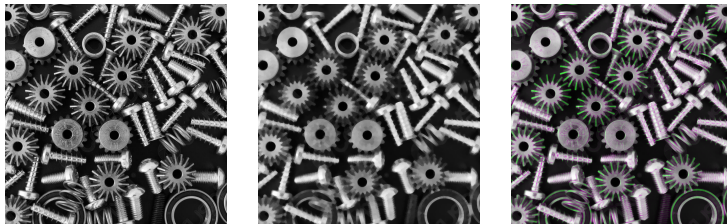
- uzavření obrázku získaného otevřením
- vyhlazuje světlé části, tmavé části jsou téměř nedotčené



- často se používá násobné aplikování open-close operace s postupně se zvětšujícím SE
- nazýváme to **alternující sekvenční filtrování**
- dosáhneme vyššího vyhlazení

Close-open operace

- otevření obrázku získaného uzávěrem
- vyhlazuje tmavé části, světlé části jsou téměř nedotčené



- často se používá násobné aplikování close-open operace s postupně se zvětšujícím SE
- nazýváme to **alternující sekvenční filtrování**
- dosáhneme vyššího vyhlazení

Morfologický gradient

- odečtení erodovaného obrázku od dilatovaného
- $g = (f \oplus B) - (f \ominus B)$
- zdůraznění přechodů mezi světlými a tmavými částmi



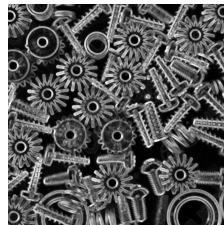
původní



dilatace



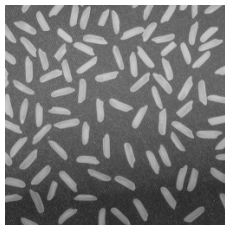
eroze



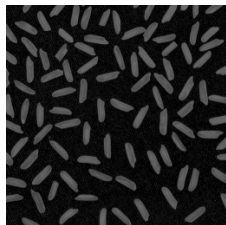
gradient

Top-hat transformace

- odečtení otevřeného obrázku od původního
- $f_{tophat} = f - (f \circ B)$
- zvýraznění světlých detailů v obraze, které jsou menší než strukturální element



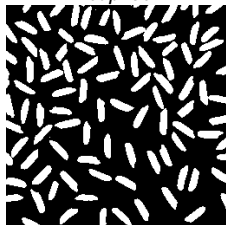
f



f_{tophat}



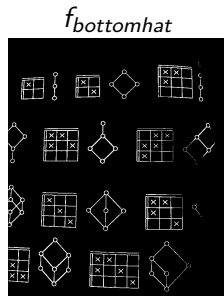
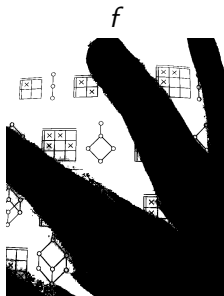
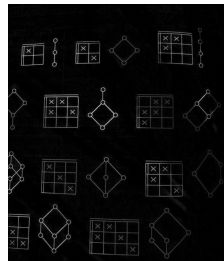
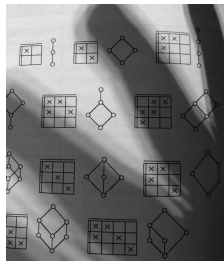
prahované f



prahované f_{tophat}

Bottom-hat transformace

- odečtení původního obrázku od uzavřeného
- $f_{bottomhat} = (f \bullet B) - f$
- zvýraznění tmavých detailů v obraze, které jsou menší než strukturální element

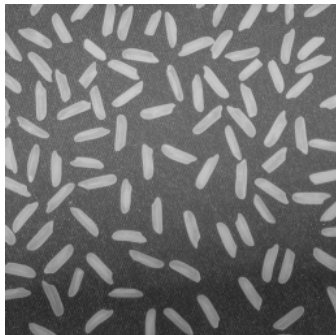


prahované f

prahované $f_{bottomhat}$

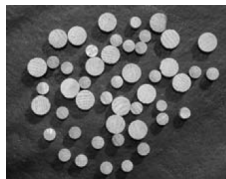
Zvětšení kontrastu

- kombinace top- a bottom-hat transformací
- $g = f + f_{tophat} - f_{bottomhat}$
- zvětšení kontrastu

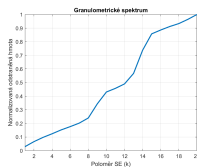


Praktické využití – Granulometrie

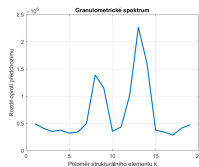
- **granulometrie** – cílem je **kvantitativně popsat rozložení velikostí objektů** v obraze
- vychází z analogie s fyzikálním procesem **prosévání částic**
- **princip:**
 - postupně provádíme **otevření** obrazu f strukturálními elementy b různých velikostí
 - každým otevřením se odstraní objekty menší než daný strukturální element
- $\gamma^{(k)}(f) = f \circ b_k$
kde b_k je strukturální element o velikosti k .
- **granulometrická funkce:** $G(k) = \sum_{x,y} [f(x,y) - \gamma^{(k)}(f)(x,y)]$
měří množství „hmoty“ odstraněné při otevření se strukturálním elementem b_k



Původní obraz



Granulometrické spektrum

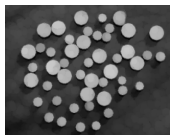


Rozdíly spektra sousedních velikostí

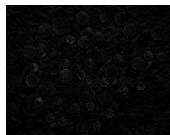
Praktické využití – Granulometrie

Velikost Otevření
SE

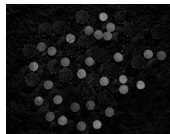
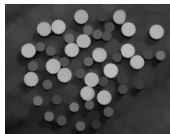
5



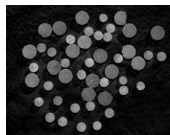
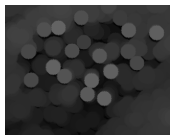
Rozdíl oproti
původnímu



9

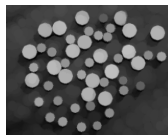


14



Velikost Otevření
SE

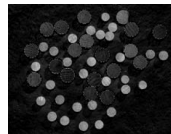
8



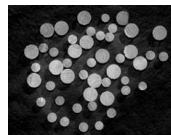
Rozdíl oproti
původnímu



13

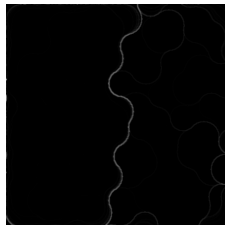
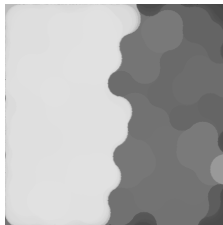
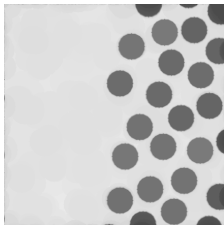
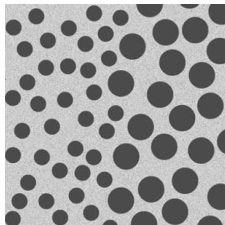


20



Praktické využití – segmentace textury

- máme obraz s 2 různými texturami
- chceme najít přechod mezi nimi
- **princip:**
 - objekty tvořící texturu jsou tmavé, budeme provádět uzavření, čímž je odstraníme
 - pokud použijeme SE větší než menší objekty, ale menší než velké, tyto objekty odstraníme
 - otevřením výsledku větším SE než jsou mezery mezi objekty získáme to, kde je druhá textura
 - provedeme-li pak morfologický gradient, získáme hranici



Fuzzy interpretace šedotónové morfologie

- šedotónovou morfologii lze chápat jako morfologii nad **fuzzy množinami**
- intenzita pixelu vyjadřuje **stupeň příslušnosti** k objektu
 $f : E \rightarrow [0, 1], \quad b : E \rightarrow [0, 1]$
- **fuzzy logické operace:**
 - **t-norma** $T(a, b)$ – fuzzy AND (konjunkce)
 - **s-norma** $S(a, b)$ – fuzzy OR (disjunkce)
 - **negace** $N(a) = 1 - a$
- **fuzzy dilatace:** $(f \oplus b)(x) = \sup_{y \in E} T(f(y), b(x - y))$
- **fuzzy eroze:** $(f \ominus b)(x) = \inf_{y \in E} S(N(f(y)), N(b(y - x)))$
- Operace jsou **duální**, pokud T, S, N splňují **de Morganovy zákony:**
 $N(T(a, b)) = S(N(a), N(b))$

Volby fuzzy operátorů a vztah ke klasické morfologii

- **Různé volby t- a s-norm** dávají různé chování morfologických operací:

Typ logiky	$T(a, b)$ (AND)	$S(a, b)$ (OR)	Vlastnosti
Gödelova (min-max)	$\min(a, b)$	$\max(a, b)$	klasická morfologie
Lukasiewiczova	$\max(0, a + b - 1)$	$\min(1, a + b)$	lineární chování
Algebraická	$a \cdot b$	$a + b - ab$	plynulejší přechody
Drastická	$\begin{cases} \min(a, b), & \text{pokud } \max(a, b) = 1, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$	$\begin{cases} \max(a, b), & \text{pokud } \min(a, b) = 0, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$	extrémní, zřídka používaná

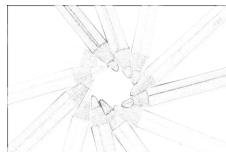
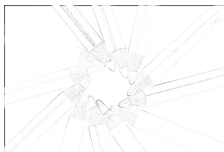
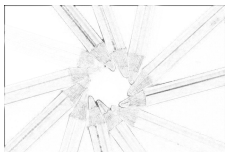
- Fuzzy morfologie zobecňuje klasickou morfologii
- Volba logických operátorů ovlivňuje ostrost přechodů a robustnost vůči šumu

Volby fuzzy operátorů a vztah ke klasické morfologii

Otevření



Top-hat



Gödel

Lukasziewicz

Algebraická